Lycée Saint-Exupéry

Classe de ECG

Cahier de vacances de Mathématiques
$1^{\text{ère}}$ année

Paul Geniet *

Année Scolaire 2025-2026

*. paul@geniet.fr

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Pour aborder sereinement le programme de mathématiques de classe préparatoire, une certaine aisance en calcul est nécessaire. Ce document est un support pour que vous puissiez effectuer un entraînement régulier cette année. Il est conçu pour vous faire revoir et surtout manipuler de manière répétitive des techniques de calcul vues au collège et au lycée. Nous nous appuierons sur ces techniques dès le début de l'année. Les premiers thèmes abordés peuvent paraître simples. Cependant il faut impérativement que les outils de base soient maîtrisés et que vous puissiez faire des calculs rapidement et sans faute.

Ce document n'est pas une introduction au cours de mathématiques de classe préparatoire. Vous n'y trouverez aucun nouveau théorème et n'y découvrirez aucune nouvelle technique. Cet document n'a même pas l'ambition de vous faire réviser de manière exhaustive votre cours de terminale.

Ce document propose des rappels de cours, des exercices, mais aussi et surtout une organisation de votre travail. En effet, chaque leçon présente le travail à effectuer sur une ou deux journées au maximum. Il est impératif de suivre l'ordre des leçons et d'effectuer vos révisions de manière régulière. Il faut absolument mémoriser le cours et faire tous les exercices de chaque leçon. Prévoir approximativement trois semaines pour mener cette tâche à bien, en travaillant raisonnablement chaque jour, suivant le rythme que vous aurez décidé d'avoir. En particulier lorsque la leçon étudiée est plus courte, n'hésitez pas à prendre le temps de prolonger ce travail obligatoire en faisant quelques exercices d'entraînement supplémentaires. Cela vous permettra d'être encore plus à l'aise pour votre première année post-baccalauréat.

Les solutions de tous les exercices sont disponible sur le site https ://paul.geniet.fr. Étudier les corrigés des exercices obligatoires fait partie du travail sur une leçon.

Enfin notez bien que la calculatrice est interdite au concours. Il en sera donc de même tout au long de l'année prochaine. Il vous faut donc faire tous les exercices proposés **sans calculatrice**.

Enfin notez bien que l'objectif à rechercher n'est pas ici simplement de connaître les notions mais bien de les maîtriser. La différence est subtile mais fondamental lors des études de mathématiques :

- Connaître, c'est avoir une information en tête, savoir réciter une formule ou résoudre une question simple avec son aide.
- Maîtriser, c'est savoir appliquer cette connaissance à des situations variées, la comprendre profondément et être capable de l'utiliser même en dehors des contextes standards.

Voici quelques conseils pour vous aider à utiliser ce document.

- Avancez à votre rythme dans les calculs. L'objectif principal n'est **pas** de calculer **vite mais** de calculer **juste**. La vitesse viendra lorsque les calculs travaillés seront des réflexes. Atteindre cette dextérité n'est d'ailleurs pas l'objectif principal de ce cahier de vacances.

- Traitez les leçons dans l'ordre sans négliger les premières, même si elles vous paraissent sans intérêt. En effet, pour être performant pour étudier les variations d'une fonction, il faut parfaitement maîtriser les techniques de factorisation, de résolution d'inéquations...
- Si on excepte les exercices de « calcul mental », travaillez impérativement par écrit, sans sauter d'étapes. Chaque étape d'un calcul doit être fondée sur une règle opératoire précise que l'on applique rigoureusement et que l'on doit être capable de citer.
- Lorsqu'un exercice a pour objectif de faire plusieurs calculs du même type, lisez le corrigé de chaque calcul avant d'aborder les calculs suivants. Il est en effet inutile de faire trois calculs avec trois fois la même erreur. Lire le corrigé de chaque calcul effectué vous permet d'aborder les calculs suivants avec plus d'assurance.
- Lorsque vous cherchez un exercice de révision, il n'est pas inutile de relire le cours concerné, même si vous êtes sûr de le connaître parfaitement. Par ailleurs, ceux qui font des exercices supplémentaires d'entraînement peuvent résoudre des exercices sur le thème du jour mais aussi sur les leçons passées.
- Entraînez vous régulièrement. Il est inutile de résoudre cinquante équations du second degré pendant une semaine, pour ne plus jamais en croiser une pendant des mois. En particulier, ceux qui chercheront les exercices d'entraînement facultatifs auront intérêt à faire un ou deux calculs de chaque exercice chaque jour (un développement, une factorisation, une manipulation de racine carrée...), plutôt que faire tous les calculs d'un exercice ne proposant que des développements un jour pour faire tous ceux d'un exercice suivant consacré aux racines carrées le lendemain.

Chapitre 1

Les fractions

Contenu de la fiche

1 Ajouter et soustraire des fractions

Proposition 1.1 (Simplification de fraction)

Si a, b et k sont trois nombres tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$, alors

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

Pour **simplifier** une fraction, il faut donc trouver un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

Exemple 1 :

$$\frac{24}{60} = \frac{4 \cdot 6}{4 \cdot 15} = \frac{\cancel{4} \cdot 6}{\cancel{4} \cdot 15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{5 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{5}.$$

Proposition 1.2 (Addition de fractions)

Si a, b et c sont trois nombres tels que $c \neq 0$, alors

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Pour ajouter, ou soustraire, deux fractions, il faut donc qu'elles soient **au même dénominateur** (on ajoute alors, ou on soustrait, les valeurs au numérateur).

Exercice 1 (☆ ☆ ☆)

Soit a un nombre entier. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (sous forme « la plus simplifiée possible »).

$$A = \frac{4}{5} + \frac{3}{25} \qquad B = \frac{2}{3} + 1 \qquad C = \frac{5}{12} + \frac{11}{24} \qquad D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$E = \left(\frac{2}{5} + 2\right) + \left(\frac{2}{15} + 3\right) + \frac{3}{10} \qquad F = \frac{a}{5} + \frac{3a}{5} + \frac{6a}{5} \qquad G = a + \frac{5a}{11} + 3a + \frac{6a}{11}$$

Exercice 2 (☆ ☆ ☆)

Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (sous forme « la plus simplifiée possible »).

$$A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \qquad B = \frac{15}{30} - \frac{3}{12} \qquad C = \frac{5}{12} - \frac{7}{18} \qquad D = \frac{4}{25} - \frac{11}{100}$$

$$E = 7 - \frac{13}{15} \qquad F = 3 - \frac{3}{4} \qquad G = \frac{25}{6} - 3$$

Exercice 3 (☆ ☆ ☆)

Soient a et $b \neq 0$, deux nombre entier. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (sous forme « la plus simplifiée possible »).

$$A = \frac{3}{9} + \left(\frac{4}{8} + \frac{10}{12}\right) \qquad B = \frac{6}{15} + \left(\frac{15}{20} + \frac{15}{27}\right) \qquad C = 2 - \left(\frac{7}{15} + \frac{3}{30}\right)$$

$$D = \left(\frac{7}{9} + 5 + \frac{3}{14}\right) - \left(3 + \frac{1}{4} + \frac{5}{6}\right) \qquad E = \frac{9a}{7} - \frac{2a}{7} \qquad F = \frac{11a}{5} - a$$

$$G = \frac{2a}{3b} - \frac{a}{15b} + \frac{3a}{10b}$$

2 Multiplier des fractions

Proposition 2.1 (Multiplication de fractions)

Si a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Pour multiplier deux fractions, on multiplie donc entre eux les numérateurs et les dénominateurs. On en déduit aussi une formule pour multiplier une fraction par un nombre :

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Exercice 4 (☆ ☆ ☆)

Soient a et b, deux nombres entiers non nuls. Calculer les produits suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (pour la dernière on se contentera d'une écriture sous forme de fraction).

$$A = \frac{13}{5} \cdot 5 \qquad B = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} \qquad C = \frac{21}{5} \cdot \frac{15}{7}$$

$$D = \frac{12}{20} \cdot \frac{35}{9} \qquad E = 5\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) \qquad F = 6\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$G = 3\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \qquad H = \left(4 - \frac{3}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right) \qquad I = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

3 Diviser des fractions

Proposition 3.1 (Multiplication de fractions)

Si a, b, c et d sont quatre nombres réels non nuls, alors

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.

Exercice 5 (☆ ☆ ☆)

Calculer les quotients suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{5 + 1/4}{7} \qquad B = \frac{8 + 3/4}{5} \qquad C = \frac{5 + 6/9}{17} \qquad D = \frac{7 + 2/3}{1/9}$$

$$E = \frac{3 + 7/9}{3/8} \qquad F = \frac{4 + 1/4}{3/8} \qquad G = \frac{3 + 4/9}{1/6}$$

Exercice 6 (☆ ☆ ☆)

Soient a et b, deux nombres réels telles que les quantités suivantes soient bien définies (c'est-à-dire sans division par zéro). Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = \frac{1}{1 + 1/a} \cdot \frac{1}{a} \qquad B = \frac{5/2}{10 + 5/2} \qquad C = \frac{a}{\frac{ab + 3b^2}{2}} \cdot \frac{b}{2a} \qquad D = \frac{1}{8/75 - 5/12}$$

4 Comparer des fractions

Proposition 4.1 (Comparaison de fractions)

Si a, b, $c > 0$ sont trois nombres réels, alors

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \qquad \text{si et seulement si} \qquad a < b.$$

Proposition 4.2 (Methode des produits en croix)

Si a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $b > 0$ et $d > 0$, alors

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \qquad \text{si et seulement si} \qquad ad < bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{si et seulement si} \qquad ad = bc$$

Pour comparer deux fractions **réduites au même dénominateur positif** revient à comparer les numérateurs. Si les fractions ne sont pas réduites au même dénominateur, on utilise les produits en croix.

Exercice 7 (☆ ☆ ☆)

Comparer strictement [a] les fractions suivantes.

$$\frac{3}{5} \text{ et } \frac{5}{9} \qquad\qquad \frac{12}{11} \text{ et } \frac{10}{12} \qquad\qquad \frac{125}{25} \text{ et } \frac{105}{21}$$

Exercice 8 (★ ☆ ☆)

Les nombres A et B suivants sont-ils égaux ?

$$A = \frac{33\,215}{66\,317} \qquad\qquad B = \frac{104\,348}{208\,341}$$

Exercice 9 (★ ☆ ☆)

On pose

$$A = \frac{100\,001}{1\,000\,001} \qquad\qquad B = \frac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$$

Comparer strictement A et B.

a. à savoir au moyen des signes $<$, $>$ ou $=$

LES PUISSANCES

Contenu de la fiche

1 Manipulation des puissances

Proposition 1.1 (Manipulation des puissances)

Soient x et y, deux réels et soient n et p, deux entiers naturels.

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad x^n x^p = x^{n+p} \qquad (x^n)^p = x^{np}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \text{ si } y \neq 0 \qquad \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p} \text{ si } x \neq 0 \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ si } x \neq 0$$

Attention :

- Les puissances ne sont en général pas compatibles avec la somme ! En effet nous notons que

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \neq 81 = 9^2 = (4+5)^2.$$

  Notons d'ailleurs que plus généralement, si $n \geqslant 2$,

$$4^n + 5^n \neq 9^n.$$

- Il faut faire attention aux **signes** et aux **parenthèses** ! En effet

$$(-2)^4 = 16 \qquad \text{mais} \qquad -2^4 = -16.$$

Remarque 1 : De manière plus générale, si a est un réel et si n est un entier naturel impair, alors $(-a)^n \neq a^n$.

Exercice 10 (☆ ☆ ☆)

Calculer les 4 premières puissances entières strictement positives des nombres suivants :

$$A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = 2 \qquad D = -2 \qquad E = 3 \qquad F = -3$$

Exercice 11 (☆ ☆ ☆)

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A=(-2)^3\,2^2 \qquad B=(-5)^2\,(-5) \qquad C=\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$D=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad E=\frac{3^2}{5^2}\left(-\frac{2}{9}\right)^2 \qquad F=\left(-\frac{2}{3}\right)^4\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$G=a^2a^4 \qquad H=a^4a^3 \qquad I=a^5a$$

$$J=-a^3\,(-a)^5 \qquad K=\left(2^2\right)^3 \qquad L=\left((-3)^2\right)^3$$

$$M=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 \qquad N=\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right)^2 \qquad O=\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3$$

$$P=\left(-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^3 \qquad Q=\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^3 \qquad R=\left((-3)^3\,5^2\right)^2$$

$$S=\left(3^3\left(-\frac{1}{6}\right)^2\right)^2 \qquad T=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2 \qquad U=\left((-2)\,10^3\left(-\frac{1}{5}\right)^4\right)^2$$

$$V=\left(-27\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2$$

Exercice 12 (☆ ☆ ☆)

Soit a un nombre réel. Simplifier les expressions suivantes en les écrivant sous la forme $\pm a^n$ ou $\pm 1/a^n$, avec n un entier naturel.

$$A=\frac{(-a)^5}{a^3} \qquad B=\frac{(-a)^6}{(-a)^3} \qquad C=\frac{(-a)^9}{-a} \qquad D=\frac{(-a)^{2026}}{a}$$

$$E=a^3a^{-5} \qquad F=a^{-2}a^{-3} \qquad G=a^{-2}a^4 \qquad H=a^2a^{-1}$$

$$I=\frac{a^3}{a^{-5}} \qquad J=\frac{a^{-4}}{a^{-2}} \qquad K=\frac{a^4}{a^{-3}} \qquad L=\frac{a^{-3}}{a^{-4}}$$

Exercice 13 (☆ ☆ ☆)

Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles ou d'entiers.

$$A=\frac{1}{(-2)^{-1}} \qquad B=-\frac{1}{5^{-1}} \qquad C=-\frac{1}{6^{-3}}$$

$$D=\frac{1}{6^3} \qquad E=(-1)^3\,2^{-2}3^3 \qquad F=(-3)^{-1}\,6^24^{-2}$$

$$G=10^{-5}10^3 \qquad H=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}(-1)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 \qquad I=\left(-\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

$$J=\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{7}\right)^{-3} \qquad K=\frac{25^32^73^5}{30^6} \qquad L=\frac{9^{-2}4^2}{3^{-3}6^{-2}}$$

$$M=\frac{49^{-2}5^62^3}{7^{-3}125^312} \qquad N=\frac{4^2\,(-12)^2}{(-2)^3\,6^{-2}3^3} \qquad O=\frac{10^{-5}25^3}{(-1)^{2026}\,2^{-4}}$$

Exercice 14 (☆ ☆ ☆)

Soit n un entier naturel. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles ou d'entiers.

$$A = \frac{4^3}{2^8} \qquad B = \frac{25^3}{(-5)^6} \qquad C = \frac{9^{-1}}{3^{-2}} \qquad D = \frac{4^{65}}{2^{128}} \qquad E = \frac{8^{-5}}{64^{-3}}$$

$$F = \frac{12^{-4027}}{144^{-2014}} \qquad G = \frac{2^{2n}}{4^n} \qquad H = \frac{3^{3n}}{27^{3n+1}} \qquad I = \frac{125^{n+1}}{5^{3n-1}} \qquad J = \frac{144^{n-1}}{(12)^{2(n+1)}}$$

2 Révision du chapitre précédent

Exercice 15 (☆ ☆ ☆)

Soient a et b deux nombres réels, avec b non nul. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

$$A = \frac{2}{15} + \frac{3}{10} \qquad B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad C = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$$

$$D = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \qquad E = \left(\frac{4}{9} + 2\right) + \frac{2}{3} + \left(2 + \frac{1}{12}\right) \qquad F = 3a + \frac{4a}{7} + \frac{a}{14}$$

$$G = \frac{3a}{2b} + \frac{a}{3b} + \frac{5a}{2b} + \frac{2a}{3b}$$

Exercice 16 (☆ ☆ ☆)

Soient a et b deux nombres réels, avec b non nul. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

$$A = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \qquad B = \frac{18}{12} - \frac{15}{10} \qquad C = \frac{17}{60} - \frac{17}{75} \qquad D = 2 - \frac{11}{8}$$

$$E = \frac{52}{15} - 3 \qquad F = 5 - \frac{17}{5} \qquad G = \frac{13}{4} - 2$$

CHAPITRE 3

LES RACINES CARRÉES

Contenu de la fiche

1 Calculs avec les racines carrées

Proposition 1.1

Pour tout nombre réel a,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a \leqslant 0 \end{cases}$$

De plus, pour tous réels positifs x et y,

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Attention : Il n'y a **pas de formule** permettant de simplifier $\sqrt{x+y}$. Notons par exemple que

$$\sqrt{3^2 * 4^2} = 5 \qquad \text{mais} \qquad \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4 = 7$$

Pour simplifier une racine carrée de la forme $\sqrt{n}$ (où n est un entier naturel), on écrit n sous la forme a^2b (où a et b sont des entiers naturels) de sorte que $\sqrt{n} = a\sqrt{b}$.

Exemple 1 : Pour simplifier $\sqrt{8}$, on écrit $8 = 2^2 \cdot 2$, de sorte que

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Remarque 1 : Ces formules ressemblent à celles utilisées au chapitre 2 sur les puissances. C'est tout à fait normal puisque, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Nous étudierons cela plus en détail au cours de l'année.

Exercice 17 (☆ ☆ ☆)

Simplifier au maximum les nombres suivants

$$A = \sqrt{1000} \qquad B = \sqrt{125} \qquad C = \sqrt{27} \qquad D = \sqrt{30^{50}}$$

$$E = \sqrt{5}\sqrt{45} \qquad F = \left(\sqrt{8}\right)^5 \qquad G = \sqrt{27^3} \qquad H = \sqrt{8}\sqrt{162}$$

$$I = \sqrt{(-1)^4} \qquad J = \sqrt{(-2)^3(-18)} \qquad K = \sqrt{\frac{9}{25}} \qquad L = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{27}{50}}$$

2 Déterminer le signe d'une expression comportant des racines carrées

Proposition 2.1

Soient x, y et z, trois réels positifs [a].

- $\sqrt{x} \geqslant 0$
- Si $x \leqslant y$, alors $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$
- Plus généralement, si $x \leqslant y \leqslant z$, alors $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y} \leqslant \sqrt{z}$

a. on rappelle qu'on ne peut considérer que la racine carrée d'un nombre positif, la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas

Remarque 2 : Le troisième point peut être utile pour obtenir une approximation d'une racine carrée.

Exemple 2 : Comme $4 \leqslant 7 \leqslant 9$, $\sqrt{4} \leqslant \sqrt{7} \leqslant \sqrt{9}$, ce qui signifie que $2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3$.

Exercice 18 (☆ ☆ ☆)

Déterminer le signe des réels suivants

$$A = \sqrt{7} \qquad B = \sqrt{\sqrt{5}} \qquad C = \sqrt{2} - \sqrt{3} \qquad D = \sqrt{2026} - \sqrt{2025}$$

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{2} \qquad F = \sqrt{11} - 2 \qquad G = \sqrt{5} - 2 \qquad H = 2 + \sqrt{5}$$

Exercice 19 (☆ ☆ ☆)

Exprimer sans racine carrée les nombres suivants.

$$A = \sqrt{(-5)^2} \qquad B = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \qquad C = \sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$$

$$D = \sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} \qquad E = \sqrt{(3-\pi)^2} \qquad F = \sqrt{(3-a)^2}$$

3 Utilisation de la quantité conjuguée

Définition 3.1 (Quantité conjuguée)

Si a et b sont des nombres positifs,

- La quantité conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
- La quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Pour simplifier une fraction avec des racines carrées (en particulier pour rendre rationnel son dénominateur), on multiplie par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple 3 :

$$\frac{\sqrt{(-1)^2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=\sqrt{2}-1$$

Exercice 20 (☆ ☆ ☆ **)**

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

$$A=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \qquad B=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \qquad C=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \qquad D=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$E=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \qquad F=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \qquad G=\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \qquad H=\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$$

4 Montrer une égalité avec des racines carrées

Pour montrer que deux quantités a et b sont égales, on peut vérifier que a2 = b2 et que a et b sont de même signe.

Exercice 21 (☆ ☆ ☆ **)**

Démontrer les égalités suivantes

$$(1)\quad 2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}} \qquad (2)\quad \sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2} \qquad (3)\quad \sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

5 Révision des chapitres précédents

Exercice 22 (☆ ☆ ☆)

Calculer les produits suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$A=\frac{3}{1000}\cdot 100 \qquad B=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{6}{\pi} \qquad C=\frac{121}{22}\cdot\frac{4}{55}$$

$$D=\frac{144}{125}\cdot\frac{75}{16} \qquad E=3\left(\frac{6}{9}+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\right) \qquad F=7\left(\frac{4}{14}+\frac{1}{3}+\frac{7}{9}\right)$$

$$G=\left(5+\frac{3}{8}\right)\left(1+\frac{5}{8}\right) \qquad H=\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{30}\right)\left(6+\frac{3}{4}\right)$$

Exercice 23 (☆ ☆ ☆)

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

$$A=10^5 10^3 \quad B=\left(10^5\right)^3 \quad C=\frac{10^5}{10^3} \quad D=\frac{10^{-5}}{10^{-3}} \quad E=\frac{\left(10^5 10^{-3}\right)^5}{\left(10^{-5}10^3\right)^{-3}} \quad F=\frac{\left(10^3\right)^{-5}10^5}{10^3 10^{-5}}$$

CHAPITRE 4

DÉVELOPPEMENT ET FACTORISATION

Contenu de la fiche

1 Développement et réduction d'expressions littérale

Définition 1.1 (Développer)

Développer et réduire une expression consiste à écrire cette expression sous la forme d'une somme de termes.

Remarque 1 : Si l'expression contient une variable x, alors chaque puissance de x ne doit apparaitre que dans au plus un terme de la somme.

Proposition 1.1 (Distributivité)

Soient a, b, c et d, quatre nombres réels.

$$a(b+c) = ab+ac,$$
$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Pour développer un expression, on peut utiliser les formules de distributivités précédentes. On dispose également de trois identités remarquables, **à maîtriser** parfaitement.

Proposition 1.2 (Identités remarquable)

Soient a et b, deux nombres réels.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2,\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

Exercice 24 (☆ ☆ ☆)

Soit x, a, b et c, quatre réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} A=\left(x^2-x\right)(x+1) & B=\left(2x^2+x-4\right)(x+2)\\ C=\left(2x^2+3-4x\right)(2x+4) & D=\left(4x^3+5x^2-\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\\ E=(x+1)(x-2)(x-3) & F=(3x-2)(2x+3)(5-x)\\ G=(x-a)(x+b)(x-c) & H=b(x+a-b)-a(x+b-a)-a^2-b^2\\ I=\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\right)(4x+16a) & J=(x-1)(x-a+b)-(1-x)(x+a-b)-2(x+a-b)(x-a+b)\end{array}$$

Exercice 25 (☆ ☆ ☆)

Soit x un réel. Développer et réduire les expressions suivantes.

$$\begin{array}{lll} A=(6-3x)^2 & B=(1+8x)^2 & C=(4x+5)(5-4x)\\ D=(7-4x)^2 & E=(-2x-9)^2 & F=(6-2x)(6+2x)\\ G=\left(3x-\frac{4}{3}\right)^2 & H=\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2 & I=(5x-3)-(3x-7)^2\\ J=(7x-3)(7x+3)-(8x-5)(8x+5) & & \end{array}$$

Exercice 26 (☆ ☆ ☆)

Soient x et y, deux réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} A=(x+1)(2x-3)(x+2) & B=(1-2x)^3\\ C=(x+y-1)^2 & D=(x-y)(x+3y)-(x+y)(x-4y)+2(x-2y)^2\end{array}$$

2 Factorisation

Définition 2.1 (Factoriser)

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit.

Pour factoriser une expression, on peut chercher d'abord à utiliser la première formule de distributivité présentée dans la partie précédente :

$$\boxed{a}\cdot\underline{c}+\boxed{a}\cdot\underline{d}=\boxed{a}\left(\underline{c+d}\right)$$

Exemple 1 : Si x et y sont des réels, alors

$$4x^2y^3-3xy^2=\boxed{xy^2}\cdot\underline{4xy}-\boxed{xy^2}\cdot\underline{3}=\boxed{xy^2}\left(\underline{xy^2-3}\right)$$

Exercice 27 (☆ ☆ ☆)

Soient $x,\ y,\ a,\ b,\ c$ et d, des réels. Factoriser les expressions suivantes.

$A=8a^2-24a+32a^3$ $\qquad$ $B=3a^2x-6ax^2+12abx$

$C=5a^4b^3+2a^2x^3-3a^2b^5$ $\qquad$ $D=a^6x^4-6a^5x^6+9a^4x$

$E=8x^2y^3-3xy^4+24x^2y^5$ $\qquad$ $F=15a^2b^2-30a^2b^3+105a^2b^4-75a^2b^5$

$G=6a^4b^3c^2d-2a^3b^4cd+8a^5b^2d^3$

Exercice 28 (☆ ☆ ☆)

Soit x, un réels. Factoriser les expressions suivantes.

$A=(2x-3)(5x-1)-(2x-3)(x+1)$ $\qquad$ $B=(7x-1)^2-(7x-1)(3x+2)$

$C=(4-3x)(2+3x)-2(1-2x)(3x-4)$ $\qquad$ $D=(3x+1)(2x-3)+(3x+1)(x+2)-(5x+4)(3x+1)$

$E=(x-8)(4x-1)+x^2-8x$ $\qquad$ $F=x^2-x+(x+1)(1-x)$.

Pour factoriser une expression, on peut aussi utiliser les identités remarquables.

Exercice 29 (☆ ☆ ☆)

Soient $a,\ b,\ x$ et y, quatre réels. Factoriser les expressions suivantes.

$A=a^4+4a^2b+4b^2$ $\qquad$ $B=4a^2-12ab+9b^2$ $\qquad$ $C=x^2-x+\dfrac{1}{4}$

$D=9a^2+\dfrac{b^2}{4}+3ab$ $\qquad$ $E=9x^2-6x+1$ $\qquad$ $F=4x^2+4x+1$

$G=4x^2+12xy+9y^2$ $\qquad$ $H=2x^2-12x+18$ $\qquad$ $I=9b^2+6ab+a^2$

$J=64a^6-16a^3b+b^2$ $\qquad$ $K=x^2-2x(x+1)+(x+1)^2$ $\qquad$ $L=(1-x)^2+6x+3$

Exercice 30 (☆ ☆ ☆)

Soient a, x et y, trois réels non nuls. Factoriser les expressions suivantes.

$A = a^2 - 25$	$B = 4x^2 - 1$	$C = 9x^2 - 4y^2$
$D = 25a^2 - 12b^2$	$E = 5x^3 - 80x$	$F = 4x^2 - a^2y^2$
$G = 49x^2 - 25$	$H = (a+1)^2 - a^2$	$I = 9x^2 - (x+2)^2$
$J = \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{x^2}{25}$	$K = \dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{9b^2}{y^2}$	$L = (3x-4)^2 - \dfrac{25}{4}$
$M = \dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{x^2}{16}$	$N = (x+3)^2 - (x+1)^2$	$O = (a+b)^2 - (a-b)^2$
$P = (2x+1)^2 - (3x-4)^2$	$Q = (2x+3)^2 - (1-4x)^2$	$R = (3x-4)^2 - 4(x+2)^2$
$S = 4(2x+3)^2 - (3x-2)^2$	$T = 25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2$	$U = \left(x^2-16\right)^2 - (x+4)^2$

3 Révision des chapitres précédents

Exercice 31 (☆ ☆ ☆)

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n, avec a et n deux entiers relatifs.

$A = 3^4 5^4 \qquad B = \left(5^3\right)^{-2} \qquad C = \dfrac{2^5}{2^{-2}} \qquad D = (-7)^3(-7)^{-5} \qquad E = \dfrac{6^5}{2^5} \qquad F = \dfrac{\left(30^4\right)^7}{2^{28}5^{28}}$

CHAPITRE 5

RÉSOLUTION D'ÉQUATION

Contenu de la fiche

1 Résoudre une équation du premier degré

Une équation du premier degré est une équation qui peut se ramener à une équation de la forme $ax+b=0$, avec a et b des réels fixés et x l'inconnue (réelle) de l'équation. Pour résoudre une telle équation, la méthode consiste à « mettre les termes avec x du même côté du signe $=$ » et à « mettre les termes constants (sans x) de l'autre côté » puis à « isoler x ».

Exemple 1 : Pour résoudre l'équation $x+3=7-x$, on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned}
x+3 &= 7-x \\
\text{On ajoute } x \text{ :} & \\
2x+3 &= 7 \\
\text{On soustrait 3 :} & \\
2x &= 4 \\
\text{On divise par 2 :} & \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Pour rédiger correctement ce calcul, il faut penser à deux choses :

- Introduire l'inconnue avec « soit $x \in \mathbb{R}$ » (ici x peut prendre n'importe quelle valeur réelle).
- Ne faut pas oublier de donner l'ensemble des solutions.

Remarque 1 : Concernant l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré, il n'y a que trois possibilités :

1. L'équation a une unique solution x_0 et l'ensemble des solutions est alors dans ce cas $\{x_0\}$. Attention : il faut utiliser des accolades et rien d'autre !
2. l'équation n'admet pas de solution, dans ce cas l'ensemble des solutions est l'ensemble vide : $\emptyset$
3. l'équation admet n'importe quel réel pour solution, dans ce cas l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Pour résoudre l'équation $x+3=7-x$, on peut rédiger comme suit.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x+3=7-x &\iff x+3=7-x \\ &\iff 2x+3=7 \\ &\iff 2x=4 \\ &\iff x=2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $x+3=7-x$ est $\{2\}$.

Exercice 32 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1)	$x+3=2$	(2)	$-5+x=4$	(3)	$3x=2$
(4)	$-5x=4$	(5)	$-4x=-10$	(6)	$3-x=-8$
(7)	$2x+4=5x-7$	(8)	$\frac{2}{3}x-5=\frac{1}{2}x-3$	(9)	$x+4=x-7$
(10)	$2x+5=2(x+2)+1$	(11)	$(x+1)^2=(x+2)^2$	(12)	$2x+3=4x+6$
(13)	$2x+3=4x+7$	(14)	$13+\frac{3}{2}x=1$	(15)	$4x+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}x+2$
(16)	$\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$	(17)	$\frac{x-3}{5}=\frac{3}{8}$	(18)	$\frac{2x-3}{7}=\frac{x-1}{3}$

2 Résoudre une équation par factorisation

Le principe de la résolution par factorisation est le suivant :

1. on ramène l'équation à une équation du type $A(x)=0$ d'inconnue x,
2. on factorise au maximum $A(x)$. Si jamais aucun facteur n'est visible, il peut être intéressant de développer pour voir si, en réduisant, des termes se simplifient. Dans ce contexte il faut penser notamment, aux identités remarquables.
3. On utilise le fait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul pour se ramener à des équations plus simples.

Exemple 3 : Nous allons résoudre l'équation

$$(x-1)(3x+2)=(x-1)(5x-4) \qquad (E)$$

Nous ramenons cette équation à

$$(x-1)(3x+2)-(x-1)(5x-4)=0.$$

On peut alors factoriser le membre de gauche par $x-1$ et ainsi :

$$\begin{aligned}(E) &\iff (x-1)(3x+2)-(x-1)(5x-4)=0\\ &\iff (x-1)((3x+2)-(5x-4))=0\\ &\iff (x-1)((3x+2)-(5x-4))=0\\ &\iff (x-1)(3x+2-5x+4)=0\\ &\iff (x-1)(-2x+6)=0\end{aligned}$$

Comme un produit de facteur est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, nous déduisons que (E) est équivalente à

$$x-1=0 \qquad \text{ou} \qquad -2x+6=0$$

De plus,

$$x-1=0 \iff x=1 \qquad\qquad -2x+6=0 \iff x=3$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $\{1,3\}$.

Attention : La stratégie consistant à simplifier par $(x-1)$ au début de la résolution amène à oublier une solution. En effet simplifier par $x-1$ dans l'égalité $(x-1)(3x+2)=(x-1)(5x-4)$ fournit

$$3x+2=5x-4$$

et l'unique solution de cette nouvelle équation est alors $x=3$.

Cela s'explique par le fait que simplifier par $x-1$ signifie diviser de part et d'autre de l'égalité par $x-1$, ce dernier devant alors être non-nul. Ainsi dans l'étape de simplification, on suppose donc que $x\neq 1$, ce qui nous a fait perdre cette solution. Cette technique est donc à proscrire.

Exemple 4 : Nous allons résoudre l'équation

$$\left(x^3-x\right)(x-2)=(x-1)\left(4x^2-8x\right). \tag{1}$$

Pour cela nous appliquons la méthode précédente :

$$\begin{aligned}(1) &\iff \left(x^3-x\right)(x-2)-(x-1)\left(4x^2-8x\right)=0\\ &\iff x\left(x^2-1\right)(x-2)-4x(x-1)(x-2)=0\\ &\iff x(x-1)(x+1)(x-2)-4x(x-1)(x-2)=0\\ &\iff x(x-1)(x-2)(x+1-4)=0\\ &\iff x(x-1)(x-2)(x-3)=0\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $x=0$, $x=1$, $x=2$ et $x=3$.

Exemple 5 : Nous allons résoudre l'équation

$$x^2=16. \tag{2}$$

Pour cela nous appliquons notre méthode, en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$\begin{aligned}(2) &\iff x^2-16=0\\ &\iff x^2-4^2=0\\ &\iff (x-4)(x+4)=0\\ &\iff x=4 \text{ ou } x=-4\end{aligned}$$

Les solutions de (2) sont donc $x=4$ et $x=-4$.

Attention : Dire que la seule solution est 4 est ici erroné ! ! ! De manière générale, si $a>0$, l'équation $x^2=a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exercice 33 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1)	$x^2(x+1)=4(x+1)$	(2)	$(3x+2)^2=(x+1)^2$
(3)	$(x-5)(x-7)=(x-5)^2$	(4)	$(2x-3)(5x+1)(5-2x)=0$
(5)	$2(x+2)(x-4)=x^2-4$	(6)	$(3x-1)(5x-4)=25x^2-16$
(7)	$3x(1-3x)=0$	(8)	$\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2\left(\frac{4x}{5}-\frac{3}{7}\right)=0$
(9)	$4x^4-1=2x^2+1$	(10)	$9x^2+1=6x$

Exercice 34 (☆ ☆ ☆)

Soit a, un nombre réel. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3)$

(2) $(x-a)(x-2a)(x+a)=x^3+2a^3$

(3) $\left(\frac{1}{2}-x\right)(5x+3)+3x(2x-1)=0$

(4) $x^3+2x^2-x-2=0$

(5) $\sqrt{2}x^4-4x^2=-2\sqrt{2}$

3 Équations polynomiales du second degré

Définition 3.1 (Equation du second degré)

Une équation polynomiale de degré 2 est une équation d'inconnue réelle x du type :

$$ax^2+bx+c=0,$$

où $a\neq 0$, b et c sont des réels appelés coefficients.

Pour résoudre une équation polynomiale de degré 2 :

1. on identifie les réels a, b et c.
2. on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
3. il y a 3 cas possibles :

   si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions : $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

   si $\Delta = 0$ alors il y a une unique solution : $\dfrac{-b}{2a}$

   si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution réelle.

Remarque 2 : Les valeurs des solutions dans le cas où $\Delta \geqslant 0$ est en fait issu de la factorisation :
si $\Delta > 0$ alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
si $\Delta = 0$ alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$,
si $\Delta < 0$ alors : $ax^2 + bx + c$ ne peut pas être factorisé.

Exercice 35 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $3x^2 - 5x + 1 = 0$	(2) $-4x + 2x^2 - 3 = 0$	(3) $x^2 + x = -1$
(4) $5x^2 - 4x + 1 = 0$	(5) $x^2 - 6x + 9 = 0$	(6) $\dfrac{x^2}{4} + x + 1 = 0$
(7) $-2x^2 - 3x + 6 = 0$	(8) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$	(9) $\dfrac{3}{4}x^2 + \sqrt{7}x - 3 = 0$
(10) $7x^2 + 6x = 1$		

Exercice 36 (☆ ☆ ☆)

Soit m, un nombre réel et soit (E_m) l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \qquad (E_m)$$

1. Résoudre les équations (E_0) (c'est à dire l'équation précédente pour $m = 0$) et l'équation (E_1) (c'est à dire l'équation précédente pour $m = 1$).
2. Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 0$ comme solution ? Donner l' éventuelle autre solution.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de m, l'équation (E_m) admet-elle :
   (a) une unique solution ?
   (b) deux solutions distinctes ?
   (c) aucune solution réelle ?

4 Résoudre une équation comportant un quotient

Définition 4.1 (Equation quotient)

Une équation quotient est une équation d'inconnue réelle x du type :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0,$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont des expressions dépendant de x.

Pour résoudre une équation avec un quotient :

1. On détermine tous les réels qui annulent $B(x)$,
2. On résout l'équation $A(x) = 0$,
3. Les solutions sont les réels trouvés à l'étape précédente dont on a exclu (si besoin), les réels annulant également $B(x)$, obtenus à la première étape.

Exemple 6 : On va résoudre l'équation

$$\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = 0$$

1. les réels qui annulent $x^2 - 1$ sont ceux qui vérifient $x^2 - 1 = 0$ c'est à dire $(x-1)(x+1) = 0$ et sont donc -1 et 1.
2. On résout $A(x) = 0$, à savoir $\left(2x^2 + x - 3\right)$. Il s'agit d'une équation polynomiale du second degré et son discriminant vaut $\Delta = 25$. Les solutions sont alors 1 et $-3/2$.
3. Comme 1 annule le dénominateur mais pas $-3/2$, alors $x = -3/2$ est l'unique solution de l'équation.

Exemple 7 : On va résoudre l'équation

$$\frac{2x - 3}{x - 1} = 0$$

1. le seul réel qui annule $x - 1$ est 1.
2. On résout $A(x) = 0$, à savoir $2x - 3 = 0$ et on obtient une unique solution : $x = 3/2$
3. Comme $3/2$ n'annule pas le dénominateur $x = 3/2$ est l'unique solution de l'équation.

Exemple 8 : On va résoudre l'équation

$$\frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{x - 1}{x + 2} \tag{3}$$

1. On se ramène à une équation quotient :

$$\begin{aligned}(3) &\iff \frac{2x - 3}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 2} = 0 \\ &\iff \frac{(2x-3)(x+2) - (x-1)^2}{(x-1)(x+2)} = 0\end{aligned}$$

2. Les réels qui annule le dénominateurs sont -2 et 1.
3. On résout $A(x) = 0$, en l'espèce $(2x-3)(x+2)-(x-1)^2 = 0$:

$$\begin{aligned} & (2x-3)(x+2)-(x-1)^2 = 0 \\ \iff & 2x^2+4x-3x-6-\left(x^2-2x+1\right) = 0 \\ \iff & x^2+3x-7 = 0. \end{aligned}$$

   On est donc ramené à une équation polynomiale de degré deux. Son discriminant vaut $\Delta = 37$ et il y a alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{37}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{37}}{2}.$$

4. Les deux solutions précédemment trouvées sont distinctes de -2 et de 1. En effet, comme $36 < 37 < 49$, $6 < \sqrt{37} < 7$ et donc,

$$1 < \frac{3}{2} < x_1 \qquad \text{et} \qquad x_2 < -\frac{9}{2} < -2$$

   Finalement, l'équation possède deux solutions : x_1 et x_2.

Remarque 3 : On peut aussi utiliser la méthode des produits en croix. Cependant il est alors nécessaire de bien prendre en compte, auparavant que les éventuels réels annulant la dénominateur ne peuvent être solutions.

Ainsi dans l'exemple précédent, on peut, à l'aide d'un produit en croix, écrire que, pour tout réel différent de 1 et de -2, notre équation initiale se ramène à $(2x-3)(x+2) = (x-1)^2$. En développant et en réduisant, on aboutit de nouveau à $x^2+3x-7 = 0$.

Exercice 37 (☆ ☆ ☆ **)**

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

(1) $\dfrac{2x+8}{5-2x} = 0$ (2) $\dfrac{3x+1}{2x+6} = 0$

(3) $\dfrac{10x-15}{12-8x} = 0$ (4) $\dfrac{(-6x+5)(3x-1)}{(7+3x)(6x-2)} = 0$

(5) $\dfrac{(-x+5)(3x-1)}{(2+3x)(-7x-3)} = 0$ (6) $\dfrac{(2x+1)(5x-4)(8x-6)}{(-4x+3)(-6x-3)} = 0$

Exercice 38 (☆ ☆ ☆ **)**

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

(1) $\dfrac{2}{3x+1} = 5$ (2) $\dfrac{3x+1}{6-5x} = 2$

(3) $\dfrac{9-x^2}{x-3} = 0$ (4) $\dfrac{3}{(x-1)(6x-2)} = \dfrac{4}{1-2x}$

(5) $\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x-2} = 3$ (6) $\dfrac{2x^2+1}{3+x} = 2x$

(7) $\dfrac{1}{1-2x}+4 = \dfrac{-4x}{2-x}$ (8) $\dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{3x-1}{x}$

Exercice 39 (☆ ☆ ☆)

Soit (E) l'équation

$$2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=0. \tag{E}$$

1. Montrer que 0 n'est pas solution de (E).
2. Montrer que

$$(E) \iff 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0.$$

3. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si $X=x+\dfrac{1}{x}$ vérifie

$$2X^2-9X+4=0.$$

4. Donner les solutions de cette dernière équation puis en déduire les solutions de (E).

5 Révisions des chapitres précédents

Exercice 40 (☆ ☆ ☆)

Soient x, y et z, trois réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

$A=(2x-y)(x+2y)$

$B=(2x+1)(3-x)(x+2)$

$C=(x+2y)^2-(2xy-1)^2+4x(x-2y)$

$D=(x+y+z)^2$

$E=(-x+y-1)(x-y-1)$

$F=\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2+\dfrac{(1+2y)^2}{4}-(x-y)^2$

CHAPITRE 6

RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS

Contenu de la fiche

1 Résoudre une inéquation du premier degré

Définition 1.1 (Résolution)

Si a et b sont des réels fixés (avec $a \neq 0$). Résoudre l'inéquation $ax+b \geqslant 0$ d'inconnue réelle x consiste à déterminer tous les réels x vérifiant $ax+b \geqslant 0$. Il en est de même pour les inéquations $ax+b \leqslant 0$, $ax+b < 0$ ou $ax+b > 0$.

Nous distinguons deux cas :

$a > 0$ Ici la résolution se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & ax+b \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & ax \geqslant -b \\ \Longleftrightarrow\ & x \geqslant -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Notons que l'ensemble des solutions est donc $S = [-{}^{b}/_{a}; +\infty[$.

$a < 0$ Dans ce cas, on est amené, lors de la dernière étape, à changer l'ordre car on divise par $a < 0$.

$$\begin{aligned} & ax+b \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & ax \geqslant -b \\ \Longleftrightarrow\ & x \leqslant -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Notons que l'ensemble des solutions est donc $S =]-\infty; -{}^{b}/_{a}]$.

En procédant de diverses manières, on peut se ramener aux cas précédents.

Exemple 1 : Nous allons résoudre l'inéquation

$$4x-5<5x+2. \tag{E}$$

Nous allons procéder de trois manières différentes.

$$\begin{aligned}(E) &\iff -5-2<5x-4x \\ &\iff -7<x.\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(E) &\iff 4x-5x<2+5 \\ &\iff -x<7 \\ &\iff x>-7.\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(E) &\iff 0<5x-4x+2+5 \\ &\iff 0<x+7 \\ &\iff -7<x.\end{aligned} \tag{3}$$

Nous notons que dans tous les cas l'ensemble des solutions est $]-7;+\infty[$.

Remarque 1 : Afin de limiter les erreurs dues à l'utilisation de nombre négatif, nous préfèrerons lorsque c'est possible la méthode (1).

Exercice 41 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $-5x+2\leqslant 0$ (2) $4x-3\leqslant 0$ (3) $\dfrac{7x+5}{5}<0$

(4) $\dfrac{-4x}{3}-\dfrac{1}{4}>0$ (5) $5x+2<-x+4$ (6) $-7x-8>5x-6$

(7) $-\sqrt{2}x-\sqrt{3}>2x+\sqrt{6}$ (8) $\dfrac{-3x}{4}+\dfrac{5}{7}\leqslant\dfrac{4}{3}-\dfrac{2x}{5}$ (9) $10^{-2}x-1<10^{-3}-\dfrac{x}{10^4}$

(10) $-3x+7<\dfrac{5x}{3}$.

Exercice 42 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $2x+7\geqslant 0$ (2) $3(x-1)\leqslant 1-2x$ (3) $\dfrac{1-3x}{5}<0$

(4) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{4-x}{4}>5$ (5) $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{1-x}{2}\geqslant\dfrac{2(2-x)}{3}$ (6) $-\sqrt{6}x-2>-\sqrt{2}(x+1)$

Exercice 43 (☆ ☆ ☆)

Soit m, un nombre réel.

Déterminer, selon les valeurs de m, l'ensemble solution de l'inéquation suivante d'inconnue réelle x

$$\frac{2x+m}{x-3}\geqslant 1.$$

2 Résoudre une inéquation en utilisant un tableau de signes

Le principe de cette partie est de résoudre une inéquation par factorisation.

1. On se ramène à une inéquation du type $A(x) \geqslant 0$ (ou $A(x) \leqslant 0$ ou $A(x) < 0$ ou $A(x) < 0$), d'inconnue x.
2. On factorise alors au maximum $A(x)$. Notons que comme dans le cas des équation, si jamais aucun facteur n'est visible, il est parfois intéressant de développer pour voir si, en réduisant, des termes se simplifient. Il est toujours utile de penser aux identités remarquables.
3. On réalise un tableau de signes pour l'expression factorisée puis on y lit l'ensemble solution.

Exemple 2 : Nous allons résoudre l'inéquation

$$(x-1)(3x+2) > (x-1)(5x-4). \tag{1}$$

D'une part nous calculons que :

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (x-1)(3x+2)-(x-1)(5x-4) > 0 \\
&\iff (x-1)((3x+2)-(5x-4)) > 0 \\
&\iff (x-1)(3x+2-5x+4) > 0 \\
&\iff (x-1)(-2x+6) > 0
\end{aligned}$$

Nous réalisons alors le tableaux de signe de $(x-1)(-2x+6)$ et pour cela nous notons au préalable que :

$$x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1 \qquad\qquad -2x+6 \geqslant 0 \iff x \leqslant 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(x-1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit alors que $(x-1)(-2x+6) > 0$ lorsque $1 < x < 3$. L'ensemble solution S de cette inéquation est donc $]1;3[$.

Exemple 3 : Nous allons résoudre l'inéquation

$$\frac{2x-3}{3-x} \leqslant 1. \tag{2}$$

D'une part nous calculons que :

$$(2) \iff \frac{2x-3}{3-x} - 1 \leqslant 0 \iff \frac{2x-3}{3-x} - \frac{3-x}{3-x} \leqslant 0 \iff \frac{2x-3-3+x}{3-x} \leqslant 0 \iff \frac{3x-6}{3-x} \leqslant 0$$
$$\iff \frac{3(x-2)}{3-x} \leqslant 0 \iff \frac{x-2}{3-x} \leqslant 0.$$

Nous réalisons alors le tableaux de signe de $\dfrac{x-2}{3-x}$ et pour cela nous notons au préalable que :

$$x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2 \qquad\qquad 3-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 3$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{x-2}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On lit alors que $\dfrac{x-2}{3-x} \leqslant 0$ lorsque $x \leqslant 2$ ou $x > 3$. L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $]-\infty;2] \cup]3;+\infty[$.

Remarque 2 : Lorsqu'une valeur annule le dénominateur, elle ne peut être solution et déterminer le signe de l'expression en cette valeur n'a aucun sens. On symbolise cela par une double-barre.

Exercice 44 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $4x^3 - x > 2x^2 + x$ (2) $x^2 < 7$ (3) $x^2 > 5$

(4) $\dfrac{5x-1}{2-3x} \geqslant 2$ (5) $(2x+1)^2(5x-3) > 0$

(6) $\dfrac{2}{x-4} > \dfrac{-3}{x+1}$ (7) $(x+1)^2(5x-2) < (2x+2)^2(4x-3)$

(8) $\dfrac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x} < 0$ (9) $\left(x^3-9x\right)(x+1) > 0$

3 Résoudre une inéquation polynomiale du second degré

Définition 3.1 (Inéquation du second degré)

On appelle inéquation polynomiale de degré 2 une inéquation d'inconnue réelle x du type :

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0 \quad (\text{ou} \leqslant 0,\ > 0,\ < 0)$$

où $a \neq 0$, b et c sont des réels appelés coefficients.

Pour résoudre une inéquation polynomiale de degré 2 :

1. On identifie les coefficients a, b et c.
2. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Il y a trois cas possible : listés ci dessous.

si $\Delta > 0$: Le trinôme ax^2+bx+c s'annule deux fois : en $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. En notant x_1 (resp. x_2 la plus petite (resp. grande) de ces valeurs, le tableau signe de ax^2+bx+c est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

si $\Delta = 0$ Le trinôme ax^2+bx+c s'annule une fois : en $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et le tableau signe de ax^2+bx+c est donné par :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

si $\Delta < 0$ Le trinôme ax^2+bx+c ne s'annule pas et le tableau signe de ax^2+bx+c est donné par :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		signe de a	

Remarque 3 : Les tableaux de signes précédents sont en fait issus des factorisations :
si $\Delta > 0$ alors : $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$,
si $\Delta = 0$ alors : $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$,
si $\Delta < 0$ alors : ax^2+bx+c ne peut pas être factorisé.

Exemple 4 : Nous allons résoudre l'inéquation

$$\frac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8} \leqslant 0$$

Le numérateur des x^2-4x+3. Son discriminant est $\Delta = 4$ et ses racines sont alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Son coefficient dominant est $a = 1 > 0$ et le tableau de signe de x^2-4x+3 est donc

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le dénominateur des $-x^2+6x-8$. Son discriminant est $\Delta = 4$ et ses racines sont alors $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$. Son coefficient dominant est $a = -1 < 0$ et le tableau de signe de x^2-4x+3 est donc

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
Signe de x^2+6x-8		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement le tableau de signe de $\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8}$ est donné par :

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
Signe de x^2+6x-8		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x^2+6x-8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi l'ensemble des solutions de $\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8} \leqslant 0$ est alors $]-\infty;1]\cup]2;3]\cup]4;+\infty[$

Exercice 45 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $3x^2-5x+1<0$ (2) $-4x+2x^2-3<0$ (3) $x^2+x \geqslant -1$

(4) $5x^2-4x+1 \leqslant 0$ (5) $x^2-6x+9 \leqslant 0$ (6) $\dfrac{x^2}{4}+x+1>0$

(7) $-2x^2-3x+6 \leqslant 0$ (8) $\sqrt{2}x^2-3x+\sqrt{2} \geqslant 0$ (9) $\dfrac{3}{4}x^2+\sqrt{7}x-3>0$

(10) $7x^2+6x<1$

Exercice 46 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $\dfrac{-x^2-5x-1}{x^2-4x+4} \geqslant 1$ (2) $\dfrac{-x^2-5x-1}{x+1} > 2x+1$ (3) $(3x-1)^2 > 2x+3$

(4) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x} \leqslant -2$ (5) $\dfrac{x+4}{2x-1} \geqslant 2x$ (6) $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2} \leqslant 1$

(7) $\dfrac{-x^2+5x+4}{7x^2-4x-3}<0$

Exercice 47 (☆ ☆ ☆)

Soit m, un nombre réel. Déterminer, selon les valeurs de m, l'ensemble solution de l'inéquation suivante d'inconnue réelle x :

$$2m^2+(5-3x)m+x^2>3x-2$$

4 Révision des chapitres précédents

Exercice 48 (★ ☆ ☆)

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

$A=\left(2\sqrt{5}\right)^2$ $\quad B=\left(2+\sqrt{5}\right)^2$ $\quad C=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $\quad D=\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

$E=\left(3+\sqrt{7}\right)^2-\left(3-\sqrt{7}\right)^2$ $\quad F=\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ $\quad G=\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ $\quad H=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$

EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Contenu de la fiche

1 Propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien

Définition 1.1 (Fonction exponentielle)

La fonction exponentielle est l'unique fonction, notée exp, qui vérifie :

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

Remarque 1 : L'exponentielle d'un réel x est notée e^x ou $\exp(x)$

Les formules de calcul suivantes sont à connaître impérativement.

Proposition 1.1 (Formules de calculs avec les exponentielles)

Soient a et b, deux nombres réels,

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad (e^a)^b = e^{ab}.$$

Remarque 2 : On rappelle que pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$. La dernière propriété fournit alors

$$\sqrt{e^a} = e^{a/2}$$

La fonction logarithme népérien, notée ln est l'unique fonction qui vérifie :

$$\forall x > 0, \quad e^{\ln(x)} = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

Notons en particulier que $\ln(1) = 0$.

Les formules de calcul suivantes sont à connaître impérativement.

Proposition 1.2 (Formules de calculs avec les logarithmes)

Soient a et b, deux nombres réels strictement positifs,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$$

Remarque 3 : Toujours en notant que pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, la dernière propriété fournit

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

Exercice 49 (☆ ☆ ☆)

Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ les quantités suivantes.

$$A = \ln\left(\sqrt{2}\right) \qquad B = \ln(8) \qquad C = \ln\left(2e^2\right) \qquad D = \ln(6) - \ln(3)$$

Exercice 50 (☆ ☆ ☆)

Soit x un réel tel que les expressions suivantes soient bien définies. Simplifier le plus possible.

$$A = \frac{e^{x^2}}{(e^x)^2} \qquad B = \frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} \qquad C = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)}$$

$$D = e^{2\ln(x)} \qquad E = \ln(2x) - \ln(x) \qquad F = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$G = \ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) + \ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \qquad H = \ln\left(e^2\sqrt{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) \qquad I = \frac{\ln\left(e^5\right)}{\ln\left(e^3\right)}$$

$$J = \sqrt{e^{2x}}e^{-x} \qquad K = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(x^2\right) \qquad L = \ln\left(x^3 - x^2\right) - \ln(x-1)$$

Exercice 51 (☆ ☆ ☆)

On pose :

$$A = \frac{\sqrt{e^{5x+3}}}{e^{3x}e^{-3x+1}} \qquad \text{et} \qquad B = \ln\left(\frac{24e^2}{e^3}e^2\right)$$

1. Écrire A sous la forme e^y, avec $y \in \mathbb{R}$.
2. Écrire B sous la forme $m + n\ln(2) + p\ln(3)$, avec m, n et p, des entiers.

2 Résolution d'équations avec exp

Proposition 2.1

Pour tous réels a et b,

$$\exp(a) = \exp(b) \iff a = b.$$

Pour résoudre une équation avec exp, on utilise la propriété précédente avec des valeurs de a et b bien choisies.

Exemple 1 : Nous allons résoudre l'équation

$$e^{2x+1} - 3 = 0. \tag{1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(1) &\iff e^{2x+1} = 3 \\
&\iff e^{2x+1} = e^{\ln(3)} \quad \text{[on se ramène à la forme donnée dans la propriété]} \\
&\iff 2x+1 = \ln(3) \quad \text{[on est ramené à une équation du premier degré]} \\
&\iff 2x = \ln(3) - 1 \\
&\iff x = \frac{\ln(3)-1}{2}
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation (1) est donc $\dfrac{\ln(3)-1}{2}$.

Remarque 4 :

- Notons qu'on aurait pu aller plus vite pour passer de $e^{2x+1} = 3$ à $2x+1 = \ln(3)$ en composant directement par la fonction ln, puisque $\ln\left(e^{2x+1}\right) = 2x+1$.
- Il faut aussi retenir que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, autrement dit, pour tout a, $e^a > 0$. Des équations comme par exemple $e^{4x+1} = -1$ n'admettent donc pas de solution réelles.

Exercice 52 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $e^x = e^{-2}$ (2) $e^x = e$ (3) $e^{x+2} = e^3$ (4) $e^{2x+1} = 2$

(5) $e^x = 1$ (6) $e^x + 4 = 0$ (7) $e^{x^2} = e$ (8) $e^{x^2+1} = 1$

Exercice 53 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

(1) $(e^x - 3)(e^x + 3) = 0$ (2) $(3x+1)e^x = 0$ (3) $(2x-1)e^x = e^x$

(4) $xe^{x+3} = 2e^{x+3}$ (5) $-e^{x^2+3} = \dfrac{1}{e^{x+3}}$ (6) $e^{4x} + e^x = 0$

(7) $e^{6x} - 4e^{3x} + 4 = 0$ (8) $9e^{-2x} - 6 + e^{2x} = 0$ (9) $e^x - 3 + 2e^{-x} = 0$

3 Résolution d'équations avec ln

Proposition 3.1 (Résolution d'équations avec ln)

Pour tous réels a et b **strictement positifs**,

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b.$$

Pour résoudre une équation avec exp, on utilise la propriété précédente avec des valeurs de a et b bien choisies.

Remarque 5 : Si nous cherchons par exemple à résoudre l'équation $\ln(2x+1) - 3 = 0$, nous devons nous méfier du domaine. En effet on ne peut ici pas travailler avec n'importe quel réel : l'expression $\ln(2x+1)$ existe si et seulement si $2x+1 > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x > -1/2$. Dans ce contexte, on ne peut donc manipuler que des éléments $x \in \left]-1/2; +\infty\right[$. On dit alors que $\left]-1/2; +\infty\right[$ est l'**ensemble** (ou **domaine**) de **définition** de l'équation.

Quand on résout une équation, on commence toujours par chercher son ensemble de définition. De plus il faut que les solutions qu'on obtient par le calcul appartiennent effectivement à cet ensemble pour être des « vraies » solutions.

Exemple 2 : Nous allons résoudre l'équation

$$\ln(2x+1) - 3 = 0. \tag{E}$$

D'une part le domaine de définition de l'équation est : $\mathcal{D} = \left]-1/2; +\infty\right[$. Soit $x \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \ln(2x+1) = 3 \\
&\iff \ln(2x+1) = \ln\left(e^3\right) \quad \text{[Forme donnée par la prop]} \\
&\iff 2x+1 = e^3 \quad \text{[Équation du premier degré]} \\
&\iff 2x = e^3 - 1 \\
&\iff x = \frac{e^3-1}{2}
\end{aligned}$$

De plus, $e^3 > 0$ de sorte que $\dfrac{e^3-1}{2} > -\dfrac{1}{2}$.[a] Finalement,

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\left\{\dfrac{e^3-1}{2}\right\}$

a. Au lycée vous utilisiez la calculatrice pour vérifier ce genre de résultats. Ce n'est maintenant plus possible. Nous reviendrons sur l'obtention de telles inégalités au chapitre10

Remarque 6 : Il aurait été possible d'aller plus vite pour passer de $\ln(2x+1)=3$ à $2x+1=e^3$ en composant directement par la fonction exp puisque $\exp(\ln(2x+1))=2x+1$.

Exercice 54 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle. On prendra soin de déterminer et de préciser leur domaine de définition.
Indication : On pourra utiliser sans démonstration[b] les inégalités suivantes :

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{array}{llll}
(1) & \ln(1+3x)=\ln(x+1) & (2) & \ln(2x+1)=\ln\left(x^2-1\right) \\
(3) & \ln(x-3)-1=0 & (4) & \ln(x)+\ln(x-1)=0 \\
(5) & \ln(4-x)=0 & (6) & \ln(x)-\ln(1-x)=\ln(2) \\
(7) & \ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5) & (8) & \ln(x-1)+\ln(2-x)=\ln(6x) \\
(9) & \ln(x-2)+\ln(x)=\ln(3) & (10) & \ln(x(x-2))=\ln(3) \\
(11) & \ln\left(x^2+5x+6\right)=\ln(x+11) & (12) & 2\ln(x)^2+3\ln(x)-2=0
\end{array}$$

4 Résolution d'inéquations avec exp

Proposition 4.1

Pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned}
\exp(a)\leqslant\exp(b) &\iff a\leqslant b\\
\exp(a)<\exp(b) &\iff a<b
\end{aligned}$$

Remarque 7 : Il est possible de remplacer $\leqslant$ par $\geqslant$ et $<$ par $>$ (ce qui revient à échanger a et b).

Pour résoudre une inéquation avec exp, on utilise la propriétés précédente, avec des valeurs de a et b bien choisies.

Exemple 3 : Nous allons résoudre l'inéquation

$$e^{2x+1}-3\leqslant 0. \qquad (E)$$

b. Nous expliquerons au chapitre10 d'où elles viennent

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff e^{2x+1} \leqslant 3 \\
&\iff e^{2x+1} \leqslant e^{\ln(3)} \quad \text{[[] Forme donnée par la prop]} \\
&\iff 2x+1 \leqslant \ln(3) \quad \text{[[] Équation du premier degré]} \\
&\iff 2x \leqslant \ln(3) - 1 \\
&\iff x \leqslant \frac{\ln(3)-1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est } \left]-\infty; \frac{\ln(3)-1}{2}\right]}$$

Remarque 8 : Il aurait été possible d'aller plus vite pour passer de $e^{2x+1} \leqslant 3$ à $2x+1 \leqslant \ln(3)$ en composant directement par la fonction ln.

Nous rappelons également que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives. Cela entraîne par exemple que l'inéquation $e^{x+2} \leqslant -2$ n'admet pas de solution (l'ensemble des solutions est $\emptyset$).

De même, $e^{x+2} > -2$ admet tous les réels comme solution (l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$), puisque pour n'importe quel x réel, on a $e^{x+2} > 0$, donc en particulier $e^{x+2} > -1$.

Exercice 55 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & e^{2x} > e^{-2} & (2) & e^{-3x} < e & (3) & e^{x} < -1 & (4) & e^{x} \geqslant -1 \\
(5) & e^{3x-5} \geqslant 3 & (6) & e^{3x-5} \geqslant -3 & (7) & e^{-2x-1} \leqslant 1 & (8) & e^{x^2+1} < -4
\end{array}$$

Exercice 56 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & e^{x+1} < 1 & (2) & -3e^{x^2-4} > 4 & (3) & e^{-2x+5} \geqslant 0 & (4) & e^{x+4} \leqslant \dfrac{1}{e^{2x}} \\
(5) & (x-1)e^{x} > 0 & (6) & (-2x+3)e^{x} < 0 & (7) & x^2 e^{-2x+5} \geqslant 0 & (8) & \dfrac{x-4}{e^{x}} \leqslant 0 \\
(9) & e^{2x} - 7e^{x} + 12 > 0 & (10) & e^{2x} + e^{x} - 6 > 0 & & & &
\end{array}$$

5 Résolution d'inéquations avec ln

Proposition 5.1

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\begin{aligned} \ln(a) \leqslant \ln(b) &\iff a \leqslant b \\ \ln(a) < \ln(b) &\iff a < b \end{aligned}$$

Remarque 9 : Il est possible de remplacer $\leqslant$ par $\geqslant$ et $<$ par $>$ (ce qui revient à échanger a et b).

Pour résoudre une inéquation avec ln, on utilise la propriétés précédente, avec des valeurs de $a > 0$ et $b > 0$ bien choisies.

Remarque 10 : Comme dans le cadre de la résolution d'équations (voir la partie 3), nous devons nous méfier du domaine.

Exemple 4 : Nous allons résoudre l'inéquation

$$\ln(2x+1) - 3 \leqslant 0. \qquad (E)$$

D'une part le domaine de définition de l'équation est : $\mathcal{D} = \left]-1/2; +\infty\right[$. (voir la partie 3 pour le détail)
Soit $x \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff \ln(2x+1) \leqslant 3 \\ &\iff \ln(2x+1) \leqslant \ln\left(e^3\right) \quad \text{[[] Forme donnée par la prop]} \\ &\iff 2x+1 \leqslant e^3 \quad \text{[[] Équation du premier degré]} \\ &\iff 2x \leqslant e^3 - 1 \\ &\iff x \leqslant \frac{e^3-1}{2}. \end{aligned}$$

De plus $\dfrac{e^3-1}{2} > -\dfrac{1}{2}$ et finalement,

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\left] -\frac{1}{2}; \frac{e^3-1}{2} \right]$

Remarque 11 : Il aurait été possible d'aller plus vite pour passer de $\ln(2x+1) \leqslant 3$ à $2x+1 \leqslant e^3$ en composant directement par la fonction exp qui est croissante.

Exercice 57 (☆ ☆ ☆)

Déterminer le domaine de définition des inéquations suivantes, d'inconnue x réelle, puis les résoudre.

(1) $\ln(x) \leqslant 3$	(2) $\ln(x) > e$	(3) $\ln(2x-1) > -1$
(4) $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \geqslant \ln 3$	(5) $\ln(x) \leqslant \ln\left(x^2-2x\right)$	(6) $\ln(x+2) \geqslant 0$
(7) $\ln(x-1) < 0$	(8) $2\ln(x+1) \leqslant 0$	(9) $2\ln(x)+1 \geqslant 0$
(10) $\ln(x+4) \geqslant 0$	(11) $\ln(x)(2-\ln(x))$	(12) $\ln(x)^2+4\ln(x)+4 \geqslant 0$

La fonction logarithme népérien peut aider aussi pour déterminer un entier n tel qu'une suite géométrique dépasse un certain seuil, c'est-à-dire à résoudre des inéquations du type $q^n \geqslant a$ ou $q^n \leqslant a$ (ou encore ces mêmes inéquations en remplaçant $\leqslant$ par $<$, ou $\geqslant$ par $>$).

Pour résoudre ce type d'inéquation, il faut commencer par composer par ln et se rappeler que $\ln(q^n) = n\ln(q)$.

Exemple 5 : Nous allons déterminer le plus petit entier n tel que $2^n > 50$. Notons que

$$2^n > 50 \iff \ln(2n) > \ln(50)$$
$$\iff n\ln(2) > \ln(50) \qquad \iff n > \frac{\ln(50)}{\ln(2)} \quad [\text{Car } \ln(2) > 0].$$

Nous en déduisons que le plus petit entier n tel que $2^n > 50$ est le premier entier supérieur au réel $\ln(50)/\ln(2)$.

Exercice 58 (☆ ☆ ☆)

Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier n qui vérifie l'inégalité proposée.

(1) $3^n > 125$	(2) $5^n \geqslant 10\,000$	(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$	(4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-4}$
(5) $2^{n-6} > 100$	(6) $\left(\dfrac{8}{10}\right)^n < 0{,}05$	(7) $1-0{,}3^n > 0{,}95$	(8) $\dfrac{4^n}{5^{n-1}} < 1$

6 Révision des chapitres précédents

Exercice 59 (☆ ☆ ☆)

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$ où n et p sont deux entiers relatifs.

$$A = \frac{2^3 3^2}{3^4 2^8 6^{-1}} \qquad B = 2^{21}+2^{22} \qquad C = \frac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} \qquad D = \frac{\left(3^2(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 2^3\right)^{-2}}$$

CHAPITRE 8

DÉRIVATION

Contenu de la fiche

1 Dérivation d'une fonction

Le tableau 8.2 suivant suit donne les dérivées usuelles. Il est à connaître **par cœur** ! ! Les notations suivantes sont utilisées : c est une constante réelle, n est un entier naturel non nul.

Expression de $f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Expression de $f'(x)$
c	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^{-n}	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{n-1}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$1/x$

TABLE 8.1 – Formulaire des dérivées usuelles

Nous disposons également des formulaires suivantes. Les formules qui y sont présentées sont valables pour toutes fonctions u et v, définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et tous réels λ, a et b, quelconques.

Expression de $f(x)$	Expression de $f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$\lambda u(x)$	$\lambda u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$u(x)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$

TABLE 8.2 – Formulaire de dérivation

Expression de $f(x)$	Expression de $f'(x)$	Condition
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$	v ne s'annule pas sur I
$u(x)^{-n}$	$-nu'(x)u(x)^{-n-1}$	u ne s'annule pas sur I
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u>0$ sur I

TABLE 8.3 – Formulaire de dérivation

Exercice 60 (☆ ☆ ☆)

Dériver les fonctions f définies par :

(1) $f(x)=x\ln(x)$ (2) $f(x)=e^x/x$ (3) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$

(4) $f(x)=e^{x^2+x+1}$ (5) $f(x)=(2x-1)^2$ (6) $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x^2+1}$

(7) $f(x)=\ln(e^x+1)$ (8) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ (9) $f(x)=1/\ln(x)$

(10) $f(x)=\left(e^{2x}+1\right)^8$ (11) $f(x)=(x+2)\ln\left(x^4+1\right)$ (12) $f(x)=\left(3e^{5x}+1\right)^7$

(13) $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$ (14) $f(x)=(1+\ln(x))^3$ (15) $f(x)=e^{-\frac{1}{x-4}}$

Exercice 61 (☆ ☆ ☆)

Soit a, un réel fixé. Dériver les fonctions f définies par :

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$ (2) $f(x)=\ln(3+e^{ax})$ (3) $f(x)=(ax+1)^7$

(4) $f(x)=\dfrac{x-a}{x+a}$ (5) $f(x)=\dfrac{2}{(ax+1)^5}$ (6) $f(x)=x^3+2ax^2-1$

(7) $f(x)=\ln(\ln(ax))$ (8) $f(x)=e^{ax^2}$ (9) $f(x)=(e^{ax}+1)^5$

Exercice 62 (★ ☆ ☆)

Soit a, un réel fixé. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout réel x, $f'(x)=af(x)$.

1. Soit K, un réel fixé. Montrer que la fonction f_K définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ke^{ax}$ appartient à $\mathcal{F}$.
2. Soit g une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que la fonction $t: x\longmapsto g(x)e^{ax}$ est dérivable et de dérivée nulle. En déduire qu'il existe une constante K réelle telle que pour tout réel x, $g(x)=Ke^{ax}$.
3. En déduire l'ensemble des fonctions composant $\mathcal{F}$.

Exercice 63 (☆ ☆ ☆)

Dériver les fonctions f définies par :

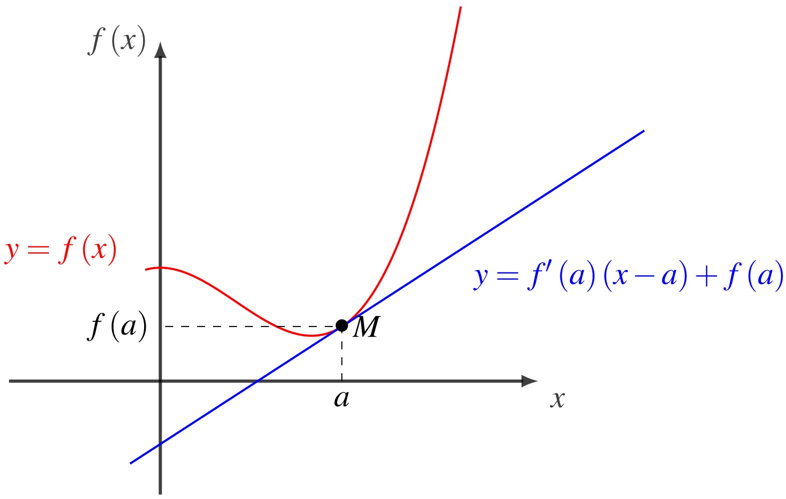
(1) $f(x)=\left(x^3-1\right)^4$ (2) $f(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{x}$ (3) $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x^2}$

(4) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (5) $f(x)=e^{x\ln(x)}$ (6) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

2 Tangente à un graphe

Du point de vue géométrique, si f est dérivable en a, alors le nombre $f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Plus généralement, l'équation réduite de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Exemple 1 : Nous allons déterminer l'équation réduite de la tangente au graphe de la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 + 5x + 1$ en -2.

Nous calculons que $f(-2) = 3$ et que pour tout réel x, $f'(x) = 6x + 5$. Ainsi, $f'(-2) = -7$ et la tangente a pour équation réduite $y = -7(x-(-2)) + 3$, c'est à dire

$$\boxed{y = -7x + 17}$$

Remarque 1 : L'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ et non pas uniquement $f'(a)(x-a) + f(a)$. Ce dernier objet étant un nombre et non pas une équation.

Exercice 64 (☆ ☆ ☆)

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'équation réduite de la tangente en a pour la fonction f.

(1) $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ en $a = 0$ (2) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{3x-9}$ en $a = 1$

(3) $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ en $a = 2$ (4) $f : x \longmapsto x + 2 + \dfrac{4}{x-2}$ en $a = -2$

Exercice 65 (☆ ☆ ☆)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + 2x + b$, où a et b sont deux réels.

Déterminer les valeurs de a et b telles que le graphe de f admette au point $A(1;-1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation réduite $y = -4x$.
Indication : On rappelle que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

Exercice 66 (☆ ☆ ☆)

Déterminer l'équation réduite de la tangente en 0 pour la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(x^2+x+1\right)$.

Exercice 67 (★ ☆ ☆)

Soit f, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1/x$. Pour tout réel $a > 0$, on note $\mathcal{T}_a$ la tangente au graphe de f au point M d'abscisse a.

1. Montrer que $\mathcal{T}_a$ coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On notera A et B les point d'intersection respectifs de $\mathcal{T}_a$ avec les axes des abscisses et des ordonnées.
2. Montrer que M est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 68 (★ ★ ☆)

Soit a un nombre réel non nul, soient x_1 et x_2, deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$, et soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$. Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2.

3 Révision des chapitres précédents

Exercice 69 (☆ ☆ ☆)

Soient a et $b \neq 0$, deux nombres réels. Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{4}{7} + \left(\frac{13}{28} - \frac{5}{14}\right) \qquad B = 2 - \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{10}\right) \qquad C = \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)$$

$$D = \frac{7a}{5} - \frac{2a}{5} \qquad E = a - \frac{a}{5} \qquad F = 2 + \frac{a}{b} - \frac{a}{3b}$$

CHAPITRE 9

VARIATIONS D'UNE FONCTION

Contenu de la fiche

1 Étude des variations d'une fonction

Définition 1.1 (Intervalle)

Un intervalle est un ensemble de la forme $]a;b[$, $]a;b]$, $[a;b[$ ou $[a;b]$, avec $a \leqslant b$ des réels ou éventuellement $\pm\infty$.

Pour étudier les variations d'une fonction, on utilise la proposition suivante qui relie les variations à la dérivée.

Proposition 1.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si $f' \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante.
- Si $f' \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante.
- Si $f' > 0$, alors la fonction f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante.

L'étude des variations se fait donc toujours en trois temps :

1. On détermine l'expression de la dérivée de f.
2. On détermine le signe de $f'(x)$ en fonction de x (souvent dans un tableau de signes).
3. On donne les variations de la fonction (le tableau de variations est souvent inscrit immédiatement après le tableau de signe déterminé à l'étape précédente).

Exemple 1 : Nous allons déterminer les variations de la fonction : $f : x \longmapsto -x^3 + x^2 + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$
2. La fonction f' est une fonction polynomiale de degré 2. Nous calculons donc son discriminant : $\Delta = 2^2 - 4(-3) = 16$. Ses racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2(-3)} = 1\text{et} \qquad\qquad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2(-3)} = \frac{1}{3}$$

et $f'(x)$ se factorise alors sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -3(x-1)x - \frac{1}{3}$$

3. Nous en déduisons le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de $f(x)$:

x	$-\infty$		$1/3$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Enfin notons que pour obtenir un tableau de variation complet, il faut aussi indiquer les différentes « valeurs au bout des flèches ». Ici il faut donc calculer $f(1/3) = -5/27$, $f(1) = 1$. Il faut aussi déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$. Ici il y a des formes indéterminées qui peuvent être levée par factorisation par le monôme de plus haut degré :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^3 \left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

Sous cette forme, il vient immédiatement que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Le tableau de variations complet de f est alors donné par :

x	$-\infty$		$1/3$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-5/27$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Remarque 1 : En cas de difficultés dans avec le calcul de limite, il est possible de laisser ce problème de côté pour le moment. Il sera revu dans l'année.

Exercice 70 (☆ ☆ ☆)

Déterminer les variations des fonctions suivantes.

(1) $f : x \longmapsto -x^2+4x+5$ sur $\mathbb{R}$	(2) $f : x \longmapsto -x^3+3x$ sur $\mathbb{R}$
(3) $f : x \longmapsto x^3-x^2-x+1$ sur $\mathbb{R}$	(4) $f : x \longmapsto x^4+8x^2+8$ sur $\mathbb{R}$
(5) $f : x \longmapsto \dfrac{x+2}{x-1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$	(6) $f : x \longmapsto \dfrac{-4x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
(7) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$	(8) $f : x \longmapsto x-1+\dfrac{4}{x-2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

Exercice 71 (☆ ☆ ☆)

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x}$.

Exercice 72 (☆ ☆ ☆)

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Exercice 73 (☆ ☆ ☆)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \left(5x^2+5x-4\right)\sqrt{x}.$$

1. Établir que la dérivée de f a pour expression

$$\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) = \frac{25x^2+15x-4}{2\sqrt{x}}.$$

2. Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 74 (☆ ☆ ☆)

Étudier les variations de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\ln(x)$.

Exercice 75 (☆ ☆ ☆)

Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x) - 5x$.

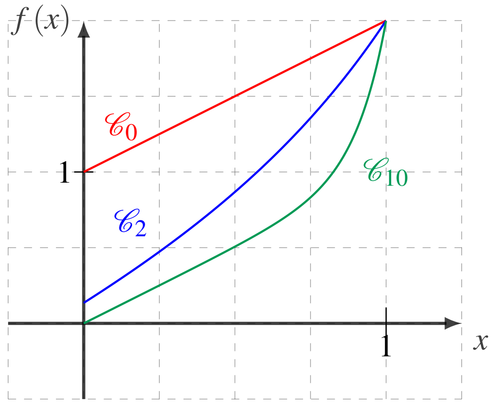
Exercice 76 (★ ☆ ☆)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par

$$\forall x \in [0;1], \quad f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est strictement positive.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est strictement croissante.
3. Montrer qu'il existe un point A du plan qui appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ (pour tout entier naturel n).



2 Révisions des chapitres précédents

Exercice 77 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnues réelles x.

(1) $5e^x - 5 \geqslant 0$ (2) $(3x-1)\,e^x \geqslant 0$ (3) $(-8x+4)\,(3x-1)\,e^{x-2} \leqslant 0$ (4) $\dfrac{6x-5}{e^{3x-1}} \leqslant 0$

CHAPITRE 10

ÉTABLIR DES INÉGALITÉS

Contenu de la fiche

1 Règles de calcul sur les inégalités

La proposition suivante rappelle les principales règles de calcul avec les inégalités.

Proposition 1.1 (Règles de calcul)

Soient a, b et c trois réels.

Ajout membre à membre : Si $a \leqslant b$, alors $a+c \leqslant b+c$ et $a-c \leqslant b-c$.

Multiplication par un nombre réel :

- Si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$.
- Si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \geqslant bc$.

Passage à l'inverse pour des nombres de même signe :

- Si $0 < a \leqslant b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.
- Si $a \leqslant b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$.

Composition par une fonction monotone :

- Si f est une fonction croissante définie sur un intervalle I, et si $a \leqslant b$ sont éléments de I, alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- Si f est une fonction décroissante définie sur un intervalle I, et si $a \leqslant b$ sont éléments de I, alors $f(a) \geqslant f(b)$.

Remarque 1 :

- La multiplication par un réel négatif ou la composition par une fonction décroissante **inversent le sens** des inégalités.
- Le dernier point permet de retrouver les précédents. En effet ajouter ou soustraire c de part et d'autre de l'inégalité revient à appliquer les fonctions $f : x \longmapsto x+c$ et $f : x \longmapsto x-c$, qui sont croissantes. De même multiplier de part et d'autre par c revient à appliquer la fonction $f : x \longmapsto cx$ qui est croissante si $c \geqslant 0$ et décroissante si $c \leqslant 0$. Enfin le passage à l'inverse est conséquence de la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Afin d'appliquer ce dernier point à des fonctions de référence, on rappelle que les fonctions ln, exp et $\sqrt{\cdot}$ sont croissantes sur leur ensemble de définition. On rappelle également que pour tout entier naturel n, la fonction $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_-$ si n est impair (resp. pair).

Pour montrer directement une inégalité, on part de ce que l'on sait puis on reconstruit au moyens d'opérations élémentaires 'expression que l'on cherche à encadrer.

Exemple 1 : Nous allons utiliser les règles de calculs de la proposition 1.1 pour encadrer $\sqrt{-\frac{x}{2}-3}$ lorsque $x \in [-7;-6]$.

Soit $x \in [-7;-6]$.

$$\begin{array}{llr}
\text{Par définition} & -7 \leqslant x \leqslant -6 & \\
\text{donc} & -\frac{1}{2}(-7) \geqslant -\frac{1}{2}x \geqslant -\frac{1}{2}(-6) & \text{Multiplication par } -\frac{1}{2} \leqslant 0 \\
\text{donc} & \frac{7}{2} \geqslant -\frac{x}{2} \geqslant 3 & \text{Simplification} \\
\text{donc} & \frac{7}{2}-3 \geqslant -\frac{x}{2}-3 \geqslant 3-3 & \text{Ajout de } -3 \\
\text{donc} & \frac{1}{2} \geqslant -\frac{x}{2}-3 \geqslant 0 & \text{Simplification} \\
\text{donc} & \sqrt{\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt{-\frac{x}{2}-3} \geqslant \sqrt{0} & \text{Application de la fonction } \sqrt{\cdot}\text{, croissante} \\
\text{donc} & \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{-\frac{x}{2}-3} \geqslant 0 & \text{Simplification}
\end{array}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall x, \quad 0 \leqslant \sqrt{-\frac{x}{2}-3} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Exercice 78 (☆ ☆ ☆)

Soit $x \in [2;3]$. Donner un encadrement des nombres suivants.

$$A(x) = 7x+3 \qquad B(x) = -x+1 \qquad C(x) = \frac{1}{7x-3}$$
$$D(x) = \exp x + \frac{2}{3} \qquad E(x) = \ln\left(-(-x+1)^3\right) \qquad F(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)^3$$

Exercice 79 (☆ ☆ ☆)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0, \quad f(x) = 2 + \ln(x)$.

1. Déterminer l'expression de lé dérivée de f.
2. Montrer que : $\forall x \in [3;4], \quad -\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{3}$

2 Encadrer des racines carrées

Pour encadrer $\sqrt{a}$ (où $a \geqslant 0$), on procède en deux étapes.

1. On encadre a entre les deux carrés parfaits les plus proches n^2 et m^2 (avec n et m des entiers naturels) : $n^2 \leqslant a \leqslant m^2$
2. On compose par la fonction racine carrée qui est croissante : $n \leqslant \sqrt{a} \leqslant m$

Exemple 2 : On va encadrer $\sqrt{73}$. Notons que $64 \leqslant 73 \leqslant 81$. Ainsi en composant par la fonction racine carrée, il vient $\sqrt{64} \leqslant \sqrt{73} \leqslant \sqrt{81}$, soit

$$\boxed{8 \leqslant \sqrt{73} \leqslant 9}$$

.

Exercice 80 (☆ ☆ ☆)

1. Justifier que $5 \leqslant \sqrt{29} \leqslant \sqrt{6}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 7 = 0$ et donner un encadrement des solutions.

Exercice 81 (☆ ☆ ☆)

Déterminer l'unique solution appartenant à $[0;1]$ de l'équation

$$\frac{1}{5}\left(3+x^2\right) = x.$$

3 Établir une inégalité avec les variations d'une fonction

Dans cette partie on utilise les compositions par une fonctions.

Exercice 82 (☆ ☆ ☆)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Justifier que : $\forall x \leqslant -1, \quad f(x) \leqslant -1$

Exercice 83 (☆ ☆ ☆)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Justifier que : $\forall x \geqslant -1, \quad f(x) \geqslant -1$

Exercice 84 (☆ ☆ ☆)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x)$$

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Justifier que : $\forall x \in [1;2], \quad f(x) \in [1;2]$

4 Se ramener à une étude de signe

On dispose de beaucoup d'outils permettant d'obtenir le signe d'une expression (comme le tableau de signes ou l'étude du signe d'une fonction en utilisant ses variations). Il est donc parfois utile de ramener la preuve d'une inégalité à l'étude d'un signe.

Si f et g sont deux fonctions définies sur un même intervalle I et si on cherche à montrer que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x),$$

alors on cherchera plutôt à montrer l'inégalité équivalente suivante :

$$\forall x \in I, \quad g(x) - f(x) \geqslant 0.$$

Exercice 85 (☆ ☆ ☆)

Montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exercice 86 (☆ ☆ ☆)

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto e^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
   (c) Justifier que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.
2. En s'inspirant de la question précédente, montrer que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 87 (★ ☆ ☆)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer le signe de f.
4. Montrer que

$$\forall x < 1, \quad 1 - x \geqslant \exp\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

5 Obtenir le signe de la dérivée

Dans certains cas, le signe de la dérivée f' n'est pas aisé à obtenir directement. Dans ce cas, il convient d'étudier séparément le signe de f' pour en déduire les variations de f. Les exercices suivant illustrent cette méthode. **Exercice 88 (☆ ☆ ☆)**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln(x)}{x}$$

et soit φ la fonction qui à x associe $\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln(x)$

1. (a) Calculer $\varphi(1)$.
   (b) Étudier les variations de φ sur $]0;+\infty[$.
   (c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.
2. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$
3. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 89 (★ ☆ ☆)

On considère, pour entier naturel non nul n, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f_n'.
   Remarque : La dérivée de la fonction f_n' peut être notée f_n''.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6 Révision des leçons précédentes

Exercice 90 (☆ ☆ ☆)

Soit h la fonction définie par

$$h : x \longmapsto \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Tracer le tableau de variations complet de h

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT SUPPLÉMENTAIRES

Contenu de la fiche

1 Fractions

Exercice 91 (☆ ☆ ☆)

Soient a et b, deux nombres réels positifs (ou nuls). Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = \frac{2}{\frac{2}{3}+2} \qquad B = \frac{a+\frac{1}{a}}{a} \qquad C = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \qquad D = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}$$

Exercice 92 (☆ ☆ ☆)

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \qquad B = \frac{1}{24}-\frac{1}{16} \qquad C = \frac{\frac{7}{15}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}} \qquad D = \frac{\frac{3}{4}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{12}}{2-\frac{4}{3}}$$

Exercice 93 (☆ ☆ ☆)

Soit k, un entier naturel non nul. Simplifier les fractions suivantes.

$$A = \frac{32}{40} \qquad B = 8^3\frac{1}{4^2} \qquad C = \frac{27^{-1}4^2}{3^{-4}2^4} \qquad D = \frac{(-2)^{2k+1}\,3^{2k-1}}{4^k 3^{-k+1}}$$

Exercice 94 (★ ★ ☆)

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = (2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) \qquad B = \left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\frac{21}{24}$$

$$C = \frac{5^{10}7^3 - 25^5 49^2}{(125\cdot 7)^3 + 5^9 14^3} \qquad D = \frac{1978\cdot 1979 + 1980\cdot 21 + 1958}{1980\cdot 1979 - 1978\cdot 1979}$$

Exercice 95 (★ ☆ ☆)

Écrire sous forme d'une fraction irréductible le nombre.

$$A = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$

Exercice 96 (★ ★ ☆)

En utilisant les entités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

$$A = \frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)\,2023} \qquad B = \frac{2021^2}{2020^2 + 2022^2 - 2}$$

$$C = \frac{1235\cdot 2469 - 1234}{1234\cdot 2469 + 1235} \qquad D = \frac{4002}{1000\cdot 1002 - 999\cdot 1001}$$

Exercice 97 (★ ☆ ☆)

Écrire les nombre suivant sous la forme d'une seule fraction écrite de la plus simple possible.

$$A = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$B = \frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}, \quad \text{pour } a \neq b$$

$$C = \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}, \quad \text{pour } n \geqslant 3$$

Indication : On pourra utiliser $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^3\right)$

Exercice 98 (★ ★ ☆)

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

$$A = \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} \qquad B = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$$

$$C = \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} \qquad D = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$$

Exercice 99 (★ ★ ☆)

On rappelle que :

$$1+2+\ldots+p=\frac{p(p+1)}{2}.$$

En utilisant cette formule, simplifier pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A=\frac{1+2+3+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}.$$

Exercice 100 (★ ☆ ☆)

On vend successivement $\frac{1}{2}$ puis $\frac{2}{9}$ puis $\frac{1}{5}$ de la contenance d'une barrique de vin. Le reste de la barrique est vendu à 1,5€ le litre ce qui représente la somme de 66€.

Quelle était la contenance de la barrique ?

Exercice 101 (★ ★ ☆)

Paul, Kenny et Jason se partagent le butin de leur dernier braquage de banque. Jason touche trois onzième du total. Paul et Kenny quant à eux se partagent le reste du butin, à savoir 32 000€. Kenny dépense deux septième de sa part et Paul quatre neuvième de la sienne. Il reste alors à Paul et à Kenny des sommes égales. Quel est le montant (en euros) du butin et quelle est la part de chacun des trois complices (en euros) ?

Exercice 102 (★ ★ ☆)

Une montre retarde d'un quart de minute pendant le jour mais par suite du changement de température, elle avance d'un tiers de minute pendant la nuit. On la règle aujourd'hui à midi. Dans combien de jours aura-t-elle une avance de deux minutes ?
Remarque : On admettra que le jour et la nuit ont chacun une durée de douze heures.

2 Puissances

Exercice 103 (★ ☆ ☆)

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

$$A=\frac{8^{17}6^{-6}}{9^{-3}2^{42}} \qquad B=\frac{55^2 121^{-2} 125^2}{275\cdot 605^{-2} 25^4} \qquad C=\frac{12^{-2}15^4}{25^2 18^{-4}} \qquad D=\frac{36^3 70^5 10^2}{14^3 28^2 15^6}$$

Exercice 104 (★ ☆ ☆)

Soit n un entier et soient a et b, deux réels non nuls. Simplifier au maximum les nombres suivants.

$$A=\frac{(ab)^2 b}{a^{3-n}} \qquad B=\frac{2a^3+6(ab)^2}{(2a)^2 b}$$

Exercice 105 (★ ☆ ☆)

Remplacer chacun des nombres λ et μ des identités suivantes par des nombres rationnels explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x appartenant à l'ensemble précisé. Les rationnels λ et μ n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

$$(1)\,(2x+3)^3 = \lambda\,(x+\mu)^3, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$
$$(2)\,(2x+3)^3 = \lambda\,(1+\mu\cdot x)^3, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$
$$(3)\,(2x+3)^4 = x^{\lambda}\left(2+\frac{3}{x}\right)^4, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^*$$

3 Racines carrées

Exercice 106 (★ ☆ ☆)

Simplifier les expressions suivantes (on pourra commencer par les élever au carré).

$$A = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \qquad\qquad B = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

Exercice 107 (★ ★ ★)

Exprimer le nombre suivant sans racine carrée au dénominateur.

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Exercice 108 (★ ☆ ☆)

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

$$A = \frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \qquad B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \qquad C = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$$
$$D = 3e^{-\ln(3)/2} \qquad E = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \qquad F = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

Exercice 109 (★ ☆ ☆)

On considère la fonction f qui à $x>1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x>1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

$$A = f(x) + \frac{1}{f(x)} \qquad B = \frac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)} \qquad C = \sqrt{x+2f(x)}$$
$$D = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad E = f(x) + 4f''(x) \qquad F = \frac{f(x)}{f''(x)}$$

4 Développement et factorisation

Exercice 110 (★ ☆ ☆)

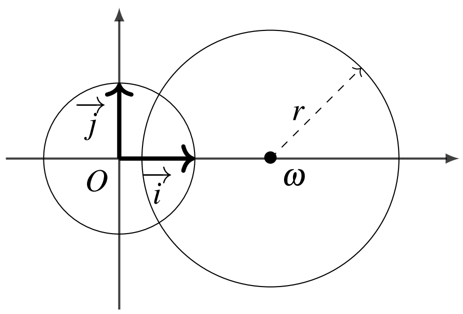
Soit n un entier naturel et soit $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1. Factoriser $n(n+3)+2$.
2. On pose $q = (n+1)(n+2)$. Exprimer $p$en fonction de q exclusivement (la lettre n ne doit plus apparaître).
3. Montrer que $p+1$ est le carré d'un entier naturel.

Exercice 111 (★ ★ ☆)

Montrer que pour tous entiers relatifs a, b et c, le triplet $\left(c\left(a^2-b^2\right),\ 2abc,\ c\left(a^2+b^2\right)\right)$ est une solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$ d'inconnue (x,y,z).

Exercice 112 (★ ★ ★)



Soit d un réel strictement positif et soit r un réel supérieur à 1. On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.

On considère le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O et de rayon 1 et le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $\omega(d,0)$ et de rayon r. Une étude géométrique assure que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement si il existe un couple de réel (x,y) tel que $x^2+y^2=1$ et $(x-d)^2+y^2=r^2$. De plus

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-d)^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2dx = d^2-r^2+1 \\ 4d^2y^2 = 4d^2-\left(d^2-r^2+1\right)^2 \end{cases}$$

Finalement on en déduit que les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement si $4d^2-\left(d^2-r^2+1\right)^2 \geqslant 0$.

1. Factoriser $4d^2-\left(d^2-r^2+1\right)^2$.
2. Montrer que les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont au moins un point d'intersection si et seulement si

$$r-1 \leqslant d \leqslant r+1.$$

Exercice 113 (☆ ☆ ☆)

Soient a, b, c, x et y, cinq réels tels que les expressions suivantes soient bien définies (autrement dit, tels qu'il n'y ait pas de division par zéro). Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{25x^5y^3}{15x^3y} \qquad B = \frac{64a^4b^2c^3}{48a^2b^3c} \qquad C = \frac{b-ab}{a-a^2}$$

$$D = \frac{a^2x^3y - ay^2 + a^2xy}{ax^2y} \qquad E = \frac{bx-by}{ax-ay} \qquad F = \frac{2a+2b+2c}{5a+5b+5c}$$

$$G = \frac{3x^2-6x}{2x^2-8} \qquad H = \frac{2x-6}{x^2-9} \qquad I = \frac{8x-6x^2}{4x^2+10x}$$

$$J = \frac{9x+3}{9x^2+6x+1} \qquad K = \frac{16x^2-24x+9}{16x^2-9} \qquad L = \frac{16x^2+24x+9}{12x+9}$$

$$M = \frac{2x+5}{4x^2+20x+25} \qquad N = \frac{(x+7)^2-x-7}{x+6} \qquad O = \frac{(5x-3)^2-4(2-x)^2}{14x-14}$$

$$P = \frac{(3x-12)\left(1-x^2\right)}{(2x-8)(x+1)^2} \qquad Q = \frac{(x+3)^2-(5x-4)^2}{36x^2-1} \qquad R = \frac{9+12x+4x^2}{2x+3}$$

$$S = \frac{4x^2-1-2(2x-1)^2}{2x-1} \qquad T = \frac{x^2-10x+9}{(x-1)^2-(1-x)(3-2x)}$$

5 Résolution d'équations

Exercice 114 (☆ ☆ ☆)

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue x réelle.

$$(1)\ln\left(x^2-3\right) = -8 \qquad (2)e^{2x} - e^{x^2} = 0$$

$$(3)\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(2) + 2\ln(3) \qquad (4)\ln(\ln(x)) > 0$$

Exercice 115 (★ ★ ☆)

On cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle.

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$$

1. Soit $x \neq 0$. Justifier que

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0 \iff x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Soit $x \neq 0$ et soit $u = x + \dfrac{1}{x}$. Développer u^2 et exprimer le résultat en fonction de x.
3. En déduire les solution de l'équation $x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$.

6 Exponentielles et logarithmes

Exercice 116 (☆ ☆ ☆)

En admettant que toutes les quantités sont bien définies, déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses et corriger celles qui sont fausses.

1. Pour tous réels a et b, $e^{ab} = e^a e^b$.
2. Pour tous réels a et b, $e^a + e^b = e^a + e^b$.
3. Pour tout réel x, $\ln(x)$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$.
4. Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln({}^a\!/_b = \ln(a) - \ln(b))$.
5. Pour tous réels a et b, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
6. Pour tous réels a et b, $be^a = e^{a^b}$.
7. Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exercice 117 (☆ ☆ ☆)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer les inégalités suivantes.

$$(1)\frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$$
$$(2)\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$$
$$(3)\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^{2x}\right)^2 = e^{3x}\left(e^{2x} + 1\right)$$

Exercice 118 (★ ☆ ☆)

Noémie possède 1 000€ sur son compte bancaire. Chaque mois, afin de payer des leçons de conduite, elle prélève 5% de la somme qu'il lui reste. Au bout de combien de mois lui restera t-il moins de 500€ ? (on ne cherchera pas à expliciter l'entier solution).

Exercice 119 (★ ☆ ☆)

Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$.
2. Montrer que pour tout réel x, $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.
3. Montrer que pour tout réel x, $g(2x) = 2f(x)g(x)$.

7 Dérivation

Exercice 120 (★ ☆ ☆)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que pour tous réel x, $h(x) = h(-x)$.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de h.
3. Montrer que la fonction h vérifie $h' = 1 - h^2$.

8 Variations d'une fonction

Exercice 121 (☆ ☆ ☆)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x + 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f. On le notera $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer les limites de f aux extrémités de $\mathscr{D}_f$. Interpréter graphiquement les limites obtenues.
3. Donner le tableau de variation complet de f.
4. Déterminer le nombre de solutions réelle à l'équation $f(x) = 7/4$.

Exercice 122 (☆ ☆ ☆)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sqrt{x}\left(-5x^2 - 5x - 1\right) + \frac{1}{2}$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
2. (a) Montrer que : $-3 - \sqrt{5} < 0$ et que $-3 + \sqrt{5} < 0$.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 123 (☆ ☆ ☆)

Déterminer les tableaux de variations complets des fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{1}{x^5 + 1} \qquad g(x) = \frac{5x - 2}{3x + 1} \qquad h(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$$

9 Établir une inégalité

Exercice 124 (☆ ☆ ☆ **)**

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2}\ln(x) \leqslant \sqrt{x} - 1$.
3. Démontrer que pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$.
4. Déduire de ce qui précède que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Indication : Pour la dernière question de, il faut se rappeler du théorème d'encadrement et du calcul de limites.

Exercice 125 (☆ ☆ ☆ **)**

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) - x \leqslant 0$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geqslant 0$.
3. En déduire que pour tout $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
4. Déduire de ce qui précède que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.

Indication : Comme dans l'exercice précédent, la dernière question nécessite de se rappeler du théorème d'encadrement et du calcul de limites.

Exercice 126 (☆ ☆ ☆ **)**

Montrer que pour tout $x \geqslant -3$,

$$(1+x)^3 \geqslant 1 + 3x$$

Exercice 127 (★ ☆ ☆ **)**

Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[1;3]$ et soit

$$A(x) = \frac{4x+1}{2x+1}.$$

L'objectif de cet exercice est d'encadrer le plus précisément possible le réel $A(x)$. Dans la première question, on utilise l'expression initiale de $A(x)$. Dans la seconde question, on transforme l'expression de $A(x)$ puis on obtient un autre encadrement, meilleur, de $A(x)$.

1. Donner des encadrements de $4x+1$ et de $2x+1$ et en déduire un encadrement de $A(x)$.
2. Écrire $A(x)$ sous la forme

$$A(x) = \lambda + \frac{\mu}{2x+1},$$

où λ et μ sont des nombres réels à déterminer. En déduire un nouvel encadrement de $A(x)$.

TABLE DES MATIÈRES