CHAPITRE 0

PRÉREQUIS

Résumé

Ce chapitre a pour objectif d'effectuer des révisions de bases des années précédentes : ensembles usuels, calculs fractionnaires et de puissances, développement et factorisation, équations et inéquations.

Plan du cours

Objectifs

1. Connaitre les ensembles usuels
2. Savoir calculer et simplifier des résultats :
   - en simplifiant des fractions
   - en développant et en factorisant
   - en calculant avec des puissances
   - en simplifiant des racines carrées
3. Savoir résoudre des équations et inéquations du premier ou du second degré

1 Ensembles de nombres

Définition 1.1 (Ensembles usuels)

Nous disposons des cinq ensembles usuels suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : $\mathbb{N} := \{0;1;2;3;\dots\}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs : $\mathbb{Z} := \{\dots;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;\dots\}$.
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres s'écrivant sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où p est un entier relatif, et q un entier naturel non nul.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels.

Notation : Nous notons $x \in \mathbb{K}$ pour indiquer que le nombre x appartient à l'ensemble $\mathbb{K}$.

Exemple 1 : Par définition nous notons les propriétés suivantes

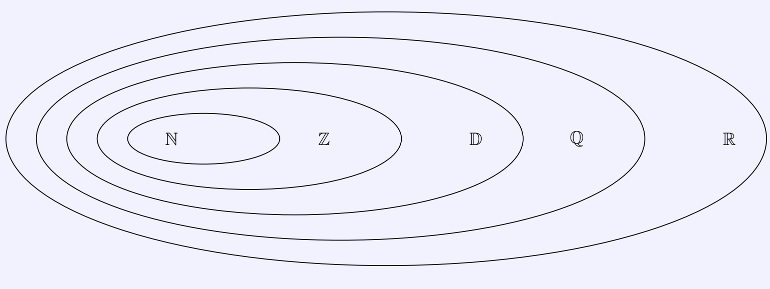
$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad 0,41 \in \mathbb{D}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.2 (Inclusion)

Soient E et F deux ensembles. Nous disons que E est inclus dans F, et notons $E \subset F$, si tout élément x de E appartient également à F.

Proposition 1.1 (Inclusion des grands ensembles de nombres)

Nous disposons des inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Démonstration. Par définition, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ (car les entiers relatifs ont un nombre fini de chiffres après la virgule, à savoir 0). Également par définition $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Il reste à voir que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. Soit $a \in \mathbb{D}$. Alors a possède un nombre fini de chiffres après la virgule. Notons d le nombre de chiffres de a après la virgule. Alors, $b = 10^d a \in \mathbb{Z}$ et donc $a = {}^{b}/_{10^d} \in \mathbb{Q}$ □

Notation : Nous notons $\mathbb{R}_+ := [0;+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$. De même nous notons $\mathbb{R}_- :=]-\infty;0]$. De plus nous notons $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, et de même pour $\mathbb{R}_-^*$. Les notations $_{+,-}$ et * s'étendent à tous les ensembles vus précédemment.

Exercice 1 : Décrire les ensembles $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}_-$ et $\mathbb{Q}_-$.

Solution : Comme sur $\mathbb{R}$, nous déduisons que $\mathbb{Z}_-^*$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs et $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. De même, $\mathbb{N}_- = \{0\}$ et $\mathbb{Q}_-$ est l'ensemble des nombres rationnels négatifs.

2 Quelque calculs

2.1 Calcul fractionnaire

Les règles de calcul sur les fractions que nous rappelons ci dessous devront impérativement être parfaitement maitrisées dès le début d'année.

Proposition 2.1 (Règles de calcul sur les fractions)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$:

- $\frac{0}{b} = 0$
- $\frac{a}{1} = a$
- $\frac{a}{-1} = -a$
- $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$
- $\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$

Pour $k \in \mathbb{R}^*$, $\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$ et si $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$, $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Exercice 2 : Calculer $A = \frac{3/7}{2/5}$, $B = \frac{2/3}{6}$, $C = 3 \cdot \frac{7}{18}$ et $D = \frac{4+17}{11+4}$.

Solution : En appliquant ce qui précède, nous calculons que :

$$A = \frac{15}{14}, \quad B = \frac{1}{9}, \quad C = \frac{7}{6}.$$

Enfin, attention : nous ne simplifions pas une fraction n'importe comment (il faut que le numérateurs et le dénominateurs soient factorisés). Ici $D = 21/15 = 7/5$.

2.2 Développement et factorisation

Développer une expression signifie l'écrire sous la forme d'une somme. Factoriser signifie l'écrire sous la forme d'un produit. Par exemple :

- $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$ est un développement ;
- $x^2 + 2x = x(x+2)$ est une factorisation.

Les identités suivantes permettent d'accélérer les calculs. Elles sont impérativement à connaître.

Proposition 2.2 (Identités remarquables)

Nous disposons des identités suivantes, valables pour tous réels a et b :

- Identités remarquables du second degré

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

- Identités remarquables du troisième degré

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) \qquad a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right).$$

Exercice 3 : Développer, pour tout réel x, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(1-x)^2$ et $(1-x)^3$. Factoriser $4-x^2$ et $8+x^3$.

Solution : En utilisant les identités remarquables, nous calculons :

$$(x+1)^2 = x^2+2x+1 \qquad (1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$$
$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 \qquad 4-x^2 = (2-x)(2+x)$$
$$(1-x)^2 = x^2-2x+1 \qquad 8+x^3 = (2+x)\left(4-2x+x^2\right).$$

2.3 Puissances

Nous rappelons la définition de la puissance entière d'un nombre réel :

Définition 2.1 (Puissances entières d'un nombre réel)

Soit a un réel non nul, et $n \in \mathbb{N}$. Nous définissons a^n de la manière suivante :

- $a^0 = 1$;
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

De plus, nous définissons

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Nous avons ainsi défini a^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2 : Par définition, $2^6 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 64$, $(-12)^1 = -12$ et $(1\,409\,091)^0 = 1$. De même $2^{-6} = 1/2^6 = 1/64$.

La proposition suivante présente les règles de calculs sur les puissances.

Proposition 2.3 (Règles de calcul sur les puissances)

Soient a et b deux réels non nuls, et n,m deux entiers relatifs.

- Puissances différentes

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

- Puissances identiques

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Exercice 4 : Simplifier

$$A = \frac{5^4 \cdot 3^2 \cdot 2^3}{15^3} \quad \text{et} \quad \frac{21 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^2}.$$

Solution : En utilisant la propriété précédente :

$$A = 5^1 \cdot 3^{-1} \cdot 2^3 = \frac{40}{3} \qquad B = \frac{21}{3} \cdot \frac{10^{-3}}{10^2} = 7 \cdot 10^{-5}.$$

2.4 Racine carrée

Nous commençons par un rappel de la définition de la racine carrée d'un réel positif.

Définition 2.2 (Racine carrée)

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique réel positif, noté $\sqrt{a}$, vérifiant $(\sqrt{a})^2 = a$. Ce nombre $\sqrt{a}$ est appelé racine carrée de a.

Remarque 1 : Nous disposons des valeurs remarquables suivantes :

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{9} = 3.$$

Attention : La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'est pas définie. Ainsi, la fonction racine carrée n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 2.4 (Calculs sur les racines carrées)

Soient a et b deux réels positifs. Alors

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

et si $b \neq 0$, alors

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Attention : En règle général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$. Par exemple, $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ et ce n'est pas égal à $\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$.

Exercice 5 : Simplifier $\sqrt{8}$, $\sqrt{48}$ et $\sqrt{9/32}$.

Solution : En utilisant ce qui précède

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}, \quad \sqrt{48}=4\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{9}{32}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

3 Equations, inéquations

3.1 Equations

Une équation est une égalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s). En général, les inconnues sont notées $x, y, z, \ldots$.

Exemple 3 : L'équation $x^2+x=3-x$ est une équation faisant intervenir une variable. L'équation $x+y=1/x-1/y$ fait intervenir deux variables, x et y.

Définition 3.1 (Résolution d'équation)

Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnues vérifiant l'équation ; on parle alors d'une solution de l'équation, et on recherche toutes les solutions de l'équation.

La première chose à faire est de trouver les valeurs interdites (division par 0, par exemple). Pour résoudre ensuite une équation, il n'y a pas de méthode universelle : on applique toutes propriétés possibles (multiplication, division) en raisonnant si possible par équivalence pour trouver les solutions.

Exercice 6 : Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x}=1$$

Solution : Déjà, il faut éviter -2 et 0. Nous nous plaçons donc sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$. Ainsi, en multipliant par $x(x+2)$ (qui ne s'annule alors pas) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x}=1 &\implies x+(x+1)(x+2)=x(x+2)\\ &\iff x+x^2+3x+2=x^2+2x\\ &\iff 2x=-2\\ &\iff x=-1.\end{aligned}$$

De plus la solution $x=-1$ est autorisée (car différente de 0 et -2). Nous avons procédé par équivalence, et nous pouvons donc conclure que l'ensemble des solutions est $\{-1\}$, ce qui se note en général

$$\mathcal{S}=\{-1\}.$$

Remarque 2 : Nous aurions pu, écrire des mots en français, au lieu des symboles $\Longleftrightarrow$. D'ailleurs en général, nous évitons l'enchaînement de symbole $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$, souvent illisible. Nous y reviendrons en début d'année.

3.2 Inéquations

Une inéquation est une inégalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s). Résoudre une inéquation signifie trouver toutes les solutions de l'inéquation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs de l'inconnue vérifiant l'inégalité.

Pour résoudre une inéquation, on procède comme pour les équations, en utilisant les règles de calculs pour les inégalités.

Proposition 3.1 (Règles sur les inégalités)

Pour tous réels x et y

- Pour tout réel k, $x \leqslant y$ si et seulement si $x+k \leqslant y+k$;
- pour tout réel $k > 0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $kx \leqslant ky$;
- pour tout réel $k < 0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $kx \geqslant ky$.

Nous retiendrons que multiplier par un nombre strictement positif conserve l'ordre, alors que multiplier par un nombre strictement négatif renverse l'ordre.

Remarque 3 : La propriété précédente est valable en remplaçant $\leqslant$ par $<$, $>$ et $\geqslant$.

Exemple 4 : Résoudre l'inéquation

$$-2(x-4) \geqslant 3x-2.$$

Solution : Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2(x-4) \geqslant 3x-2 &\Longleftrightarrow -2x+8 \geqslant 3x-2 \\ &\Longleftrightarrow -5x \geqslant -10 \\ &\Longleftrightarrow x \leqslant 2. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité est vérifiée pour tout $x \leqslant 2$:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 2\} =]-\infty; 2].$$

3.3 Équations et inéquations du second degré

Théorème 3.1 (Polynômes du second degré)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  De plus $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P possède une unique racine réelle dite double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

  De plus, $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P ne possède pas de racines réelles, et ne se factorise donc pas sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5 : Factoriser $P(x) = 2x^2 + 2x - 4$.

Solution : Nous calculons $\Delta = 36 > 0$. Par conséquent le polynôme P possède deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = 1.$$

Donc $P(x) = 2(x - 1)(x + 2)$.

Remarque 4 : Lors de la factorisation, il ne faut pas oublier de mettre en facteur le coefficient de plus haut degré (dans l'exemple précédent, le 2).

4 Exercices

Ensembles

Exercice 1 (★ ☆ ☆) : Non inclusion (5 min)

Montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

Calculs

Exercice 2 (★ ☆ ☆) : Fractions (10 min)

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

A= $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{13}{4} - \frac{12}{6}\right)$ B= $\frac{4}{3} - 1$ C= $\frac{1/3 + 2}{5/6 - 1}$ D= $\frac{1/3 - 1/2}{2/5 + 3/8}$.

Exercice 3 (★ ☆ ☆) : Puissance (10 min)

Simplifier les expressions suivantes.

A= $\frac{4 \cdot 10^{12} \cdot 9 \cdot 10^{-5}}{1,2 \cdot 10^2}$ C= $\frac{3^2 \cdot 27}{81^2}$

B= $\frac{4 \cdot 7^2 - 2^5 \cdot 3}{4^4 - 4^3}$ D= $4 \cdot \left(2^2 - 2^4\right)^2 - 64$

Exercice 4 (★ ☆ ☆) : Sur $(-1)^n$ (5 min)

Calculer $(-1)^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Que constate-t-on ? Déterminer la valeur de $(-1)^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 5 (★ ☆ ☆) : Racines (15 min)

1. Exprimer les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.

$$A = \sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 5\sqrt{24} \qquad B = \sqrt{160} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{90}$$

2. Exprimer les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.

$$C = \left(3\sqrt{10} - 5\sqrt{3}\right)^2 \qquad D = \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6}\right)^2$$

3. Exprimer les expressions suivantes sous la forme d'un nombre entier.

$$E = \left(3 - 2\sqrt{5}\right)\left(3 + 2\sqrt{5}\right) \qquad F = \frac{24\sqrt{45}}{9\sqrt{80}}$$

Développement, factorisation

Exercice 6 (★ ☆ ☆) : Factorisation (10 min)

Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

$A = 64x^2 - 100$

$B = -(9x-2)(4x+9)+(3x-8)(9x-2)$

$C = 16x^2 - 24x + 9$

$D = (x+5)^2 - 81$

$E = (-8x+2)^2 + (-8x+2)(8x+4)$

$F = (9x+7)(3x+3)+9x+7$

Exercice 7 (★ ☆ ☆) : Développement (10 min)

Développer chacune des expressions littérales suivantes :

$A = (4x+4)(4x-4)$

$B = (5x+10)^2$

$C = (10x-2)(10x+2)$

$D = \left(\frac{1}{8}x - \frac{10}{3}\right)^2$

$E = (-5x+9)(8x-2)-7x-8$

$F = (9x+2)(-3x-5)+4$

$G = (-8x+4)(9x-8)+2x^2$

Equations

Exercice 8 (★ ☆ ☆) : Équations (10 min)

Résoudre les équations suivantes :

1. $(2x-1)(x+1) = x+1$.
2. $\dfrac{x^2-2}{x+1} = x+4$.

Exercice 9 (★ ☆ ☆) : Second degré (15 min)

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 7x - \frac{45}{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -\frac{1}{2}(x+9)(x+5)$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -\frac{1}{2}(x+7)^2 + 2$.
2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

   (a) $f(x) = 0$

   (b) $f(x) = -\dfrac{45}{2}$

   (c) $f(x) = 2$

Exercice 10 (★ ★ ☆) : Second degré - plus difficile (15 min)

On considère l'équation

$$2x^2+11x-4=0. \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions,notées x_1 et x_2 et à ne pas calculer (et ce tout au long de l'exercice).
2. Donner les valeurs de x_1+x_2 et x_1x_2.
3. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.
4. Calculer $x_1^2+x_2^2$.
5. Calculer $x_1^3+x_2^3$.
6. Calculer $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}$.

Inéquations

Exercice 11 (★ ☆ ☆) : Inéquation (10 min)

Résoudre les inéquations :

1. $\dfrac{-6x+5}{6}-\dfrac{3x-10}{2}\geqslant\dfrac{9x+8}{3}$
2. $\dfrac{4x-5}{9}-\dfrac{6x+9}{4}<\dfrac{9x+5}{6}$

Exercice 12 (★ ☆ ☆) : Inéquation (30 min)

Résoudre les inéquations :

1. $(2x-1)(1-3x)<0$
2. $3x+5\geqslant(x+6)(3x+5)$
3. $\dfrac{(x+1)(x-2)}{2x+1}>0$

Exercice 13 (★ ☆ ☆) : Inéquations (30 min)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

1. $(2x+3)(3x-5)(7-x)<0$
2. $2x(x+1)\geqslant(1-3x)(x+1)$
3. $x^3-x\leqslant 2x^2-2$

5 Corrigé des Exercices

Exercice 1

Nous donnons in contre exemple pour chaque cas. Ainsi :

$$-1 \in \mathbb{Z} \text{ mais } -1 \notin \mathbb{N}, \quad 0,1 \in \mathbb{D} \text{ mais } 0,1 \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \text{ mais } \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

Le dernier résultat venant du fait qu'il y a une infinité de chiffres après la virgule pour $1/3 = 0.333\ldots$.

Exercice 2

Les propriétés de calcul sur les fractions fournissent :

$$A = \frac{4}{3}\left(\frac{39-24}{12}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{15}{12} = \frac{5}{3}, \qquad B = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3},$$

$$C = \frac{1/3 + 6/3}{5/6 - 6/6} = \frac{7/3}{-1/6} = \frac{7}{3}(-6) = -14, \qquad D = \frac{2/6 - 3/6}{16/40 + 15/40} = \frac{-1}{6}\cdot\frac{40}{31} = -\frac{20}{93}.$$

Exercice 3

Les règles de calculs sur les puissances et les fractions fournissent :

$$A = \frac{4\cdot 3\cdot 10^7}{\frac{6}{5}\cdot 10^2} = \frac{12\cdot 5}{6}\cdot 10^5 = \frac{2}{5}\cdot 10^5 = 4\cdot 10^4 \qquad C = \frac{3^2\cdot 3^3}{\left((3^2)^2\right)^2} = \frac{3^5}{3^8} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$B = \frac{2^2\left(7^2 - 2^3\cdot 3\right)}{4^3\left(4-1\right)} = \frac{7^2 - 2^3\cdot 3}{4^2\cdot 3} = \frac{25}{48}$$

$$\begin{aligned} D &= \left(2^3 - 2^5\right)^2 - 8^2 = \left(2^3 - 2^5 - 8\right)\left(2^3 - 2^5 + 8\right) \\ &= \left(-2^5\right)\left(2^4 - 2^5\right) = 2^{10} - 2^9 = 2^9\left(2-1\right) = 2^9 = 512. \end{aligned}$$

Exercice 4

Les règles de calcul sur les puissances :

$$(-1)^0 = 1, \quad (-1)^{1=} - 1, \quad (-1)^2 = 1, \quad (-1)^3 = -1, \quad (-1)^4 = 1 \text{ et } (-1)^5 = -1$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $(-1)^n = 1$ si n est pair, -1 sinon.

Exercice 5

1. La règle $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour a et b deux réels positifs permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2\cdot 3^3} - 3\sqrt{3\cdot 2^5} - 5\sqrt{2^3\cdot 3} = 3\sqrt{6} - 12\sqrt{6} - 10\sqrt{6} = -19\sqrt{6}, \\ B &= \sqrt{5\cdot 2^5}\cdot\sqrt{2^3\cdot 5}\cdot\sqrt{3^2\cdot 2\cdot 5} = \sqrt{5^3\cdot 2^9\cdot 3^2} = 240\sqrt{10}. \end{aligned}$$

2. Nous développons par l'identité remarquable et on conclut :

$$\begin{aligned} C &= \left(3\sqrt{10}\right)^2 - 2\cdot 3\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{3} + \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 90 - 30\sqrt{30} + 75 = 165 - 30\sqrt{30}, \\ D &= \left(3\sqrt{5}\right)^2 + 2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{6} + \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 45 + 12\sqrt{30} + 24 = 69 + 12\sqrt{30}. \end{aligned}$$

3. Nous utilisons les formules sur les racines :

$$E = 3^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 20 = -11, \qquad F = \frac{24}{9}\sqrt{\frac{45}{80}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{8}{3}\frac{3}{4} = 2.$$

Exercice 6

Les identités remarquables et les méthodes de factorisation usuelles fournissent :

$$\begin{aligned}
A &= (8x)^2 - 10^2 = (8x-10)(8x+10) \\
B &= (9x-2)[-(4x+9)+(3x+8)] = (9x-2)(-x-1) \\
C &= (4x)^2 - 2\cdot(4x)\cdot 3 + 3^2 = (4x-3)^2 \\
D &= (x+5)^2 - 9^2 = (x+5-9)(x+5+9) = (x-4)(x+14) \\
E &= (-8x+2)[(-8x+2)+(8x+4)] = 6(-8x+2) \\
F &= (9x+7)[(3x+3)+1] = (9x+7)(3x+4)
\end{aligned}$$

Exercice 7

Après développement, en utilisant soit les identités remarquables (A, B, C et D), soit la double distributivité :

$$\begin{aligned}
A &= (4x)^2 - 4^2 = 16x^2 - 16 \\
B &= 25x^2 + 100x + 100 \\
C &= 100x^2 - 4 \\
D &= \frac{1}{64}x^2 - 2\frac{1}{8}\frac{10}{3}x + \frac{100}{9} = \frac{1}{64}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{100}{9} \\
E &= \left(-40x^2 + 10x + 72x - 18\right) - 7x - 8 = -40x^2 + 75x - 26 \\
F &= \left(-27x^2 - 45x - 6x - 10\right) + 4 = -27x^2 - 51x - 6 \\
G &= \left(-72x^2 + 64x + 36x - 32\right) + 2x^2 = -70x^2 + 100x - 32
\end{aligned}$$

Exercice 8

1. En regroupant dans un même membre puis en factorisant, il vient

$$(2x-1)(x+1) = (x+1) \iff (x+1)(2x-1-1) = 0 \iff (x+1)(2x-2) = 0$$

   Ce produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nuls. Donc

$$(2x-1)(x+1) = x+1 \iff x+1 = 0 \text{ ou } 2x-2 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

   Bilan : l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$.

2. Tout d'abord, l'équation ne peut se résoudre que sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Sur cet ensemble, elle se ramène à

$$x^2 - 2 = (x+4)(x+1) \text{ soit à } 5x+6 = 0.$$

   L'unique solution possible est donc $-6/5$ qui est bien dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Bilan : l'équation a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{-6/5\}$.

Exercice 9

1. Il suffit de développer les deux formes données pour vérifier le résultat. La forme de l'énoncé est appelée *forme développée*, la forme (a) est la *forme factorisée*, et la forme (b) est la *forme canonique*.
2. (a) Pour cette équation, nous utilisons la forme factorisée. L'équation devient alors
$$-\frac{1}{2}(x+9)(x+5)=0.$$
Il vient alors $\mathcal{S}=\{-5;-9\}$
   (b) Nous utilisons la forme développée. L'équation devient donc
$$-\frac{1}{2}x^2-7x=0 \text{ soit } x\left(-\frac{1}{2}x-7\right)=0.$$
Ainsi, l'équation possède deux solutions : $x=0$ et $x=-14$: $\mathcal{S}=\{-14;0\}$.
   (c) Pour cette dernière, on utilise la forme canonique et l'équation devient $-\frac{1}{2}(x+7)^2=0$. Ainsi $\mathcal{S}=\{-7\}$

Exercice 10

1. Nous calculons le discriminant : $\Delta=11^2-4\cdot 2\cdot(-4)=153>0$.
2. Nous factorisons : $2x^2+11x-4=2(x-x_1)(x-x_2)$. En développant et en identifiant, il vient
$$2x^2+11x-4=2x^2-2(x_1+x_2)x+2x_1x_2.$$
Ainsi, $x_1+x_2=-11/2$ et $x_1x_2=-4/2=-2$.
3. En réduisant au même dénominateur et en utilisant la question précédente, il vient :
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-11/2}{-2}=\frac{11}{4}.$$
4. En développant $(x_1+x_2)^2$, nous déduisons que $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$. Ainsi :
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{11}{2}\right)^2-2(-2)=\frac{137}{4}.$$
5. En factorisant, il vient :
$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left(x_1^2-x_1x_2+x_2^2\right).$$
En utilisant les résultats précédents nous concluons que
$$x_1^3+x_2^3=-\frac{11}{2}\left(\frac{137}{4}-(-2)\right)=\frac{1595}{8}.$$
6. En réduisant au même dénominateur en développant et en appliquant les résultats précédents, nous calculons que
$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\frac{-11/2+2}{-2-11/2+1}=\frac{7}{13}.$$

Exercice 11

1. Nous regroupons dans un seul membre et nous réduisons au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
&\frac{-6x+5}{6}-\frac{3x-10}{2}\geqslant\frac{9x+8}{3}\iff\frac{-6x+5}{6}-\frac{3x-10}{2}-\frac{9x+8}{3}\geqslant 0\\
&\iff\frac{-6x+5}{6}-\frac{9x-30}{6}-\frac{18x+16}{6}\geqslant 0\iff\frac{-6x+5-(9x-30)-(18x+16)}{6}\geqslant 0\\
&\iff\frac{-33x+19}{6}\geqslant 0\iff -33x+19\geqslant 0\iff x\leqslant\frac{19}{33}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left]-\infty;{}^{19}\!/_{33}\right]$.

2. Nous multiplions par 36 pour simplifier les fractions :

$$\frac{4x-5}{9}-\frac{6x+9}{4}<\frac{9x+5}{6}\iff 4\,(4x-5)-9\,(6x+9)<6\,(9x+5)\iff -92x<71\iff x>-\frac{71}{92}.$$

   Ainsi, $\mathcal{S}=\left]-{}^{71}\!/_{92};+\infty\right[$.

Exercice 12

1. Nous dressons le tableau de signe (fonctions affines ici) :

x	$-\infty$		$1/3$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-1)\,(1-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left]-\infty;-{}^{1}\!/_{3}\right[\cup\left]{}^{1}\!/_{2};+\infty\right[$.

2. En passant tous les termes dans un même membre, nous obtenons $3x+5-(x+6)\,(3x+5)\geqslant 0$. Par suite, en factorisant nous déduisons que $(3x+5)\,(1-(x+6))\geqslant 0$, soit

$$(3x+5)\,(-x-5)\geqslant 0.$$

   Le tableau de signe est alors

x	$-\infty$		-5		$-5/3$		$+\infty$
$3x+5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x+5)\,(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors $\mathcal{S}=\left[-5;-{}^{5}\!/_{3}\right]$

3. Nous dressons le tableau de signes sur $\mathbb{R}\setminus\{-{}^{1}\!/_{2}\}$: $-{}^{1}\!/_{2}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x+1)(x-2)}{2x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathcal{S} =]-1;-1/2[\cup]2;+\infty[$

Exercice 13

1. Nous dressons le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-3/2$		$5/3$		7		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+3)(3x-5)(7-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous concluons alors que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-3/2;5/3[\cup]7;+\infty[$.

2. Nous passons tout dans un même membre puis nous factorisons

$$2x(x+1) \geqslant (1-3x)(x+1) \iff (x+1)(2x-(1-3x)) \geqslant 0 \iff (x+1)(5x-1) \geqslant 0.$$

Il nous reste à dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$1/5$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(5x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S} =]-\infty;-1]\cup[1/5;+\infty[$.

3. Nous factorisons

$$x^3-x = x\left(x^2-1\right) = x(x-1)(x+1) \quad \text{et} \quad 2x^2-2 = 2\left(x^2-1\right) = 2(x-1)(x+1)$$

Nous passons tout dans un même membre, et nous factorisons :

$$x^3-x \leqslant 2\left(x^2-1\right) \iff (x-1)(x+1)(x-2) \leqslant 0$$

Il nous reste à dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty;-1] \cup [1;2]$.